Министерство образования и науки Пермского края

ГБПОУ «Уральский химико-технологический колледж»



**МАТЕМАТИКА**

Методические указания по выполнению контрольных работ для студентов заочного отделения, обучающихся

по специальности

**18.02.06 Химическая технология органических веществ**

Губаха, 2024г

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **СОГЛАСОВАНО**  Протокол заседания ПЦК ОО, ОГСЭ и ЕН № 3 от «12» января 2024 г.  Председатель ПЦК  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Новикова Н.С. | | |  | **УТВЕРЖДАЮ**  Зам. директора по УР  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Галимова Ю.А.  « » января 2024 г. | |
|  | |  |  | | |

Методические указания по учебной дисциплине Математика для обучающихся заочно в системе среднего профессионального образования по специальности18.02.06 Химическая технология органических веществ

/Сост. Соловьёва Л.Л. – Губаха: УХТК, 2024 – \_\_\_\_\_с

Методические указания разработаны с целью оказания помощи студентам - заочникам в организации их самостоятельной работы над изучением учебного материала и выполнением домашней контрольной работы.

В рекомендациях указывается структура и содержание учебной дисциплины, примеры заданий для контрольных работ.

**Организация-разработчик**: ГБПОУ «Уральский химико-технологический колледж»

**Разработчик:** Соловьёва Л.Л., преподаватель физики первой квалификационной категории

Уральский химико-технологический колледж, 2024

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п/п | Наименование разделов | стр. |
|  |  |  |
| 1 | ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 2 | ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ | 4 |
| 2.1 | Общие и профессиональные компетенции | 4 |
| 2.2 | Объем и содержание УД | 6 |
| 2.3 | Общие рекомендации по самостоятельной работе студентов заочного отделения | 9 |
| 3 | ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. ТРЕБОВАНИЯ К ИХ ОФОРМЛЕНИЮ | 10 |
| 3.1 | Требования к оформлению домашних контрольных работ | 10 |
| 3.2 | Теоретический материал для выполнения контрольной работы и подготовки к зачету (экзамену) | 12 |
| 3.3 | Варианты контрольных работ | 55 |
| 4 | ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К  ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМУ ЗАЧЕТУ (ЭКЗАМЕНУ) ПО ИТОГАМ ВСЕХ ИЗУЧЕННЫХ ТЕМ | 70 |
| 5 | СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ | 71 |
|  | ПРИЛОЖЕНИЕ А | 73 |
|  | ПРИЛОЖЕНИЕ Б | 74 |
|  | ПРИЛОЖЕНИЕ В | 75 |
|  | |  | | --- | |  | |  | |  |
|  |  |  |

# ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина ЕН.01 Математика является обязательной частью математического и общего естественнонаучного учебного циклаОПОП по специальности 18.02.06 Химическая технология органических веществ в соответствии с ФГОС СПО.

Основной формой учебной работы обучающегося - заочника является самостоятельное изучение рекомендуемой литературы, учебных пособий. На установочных занятиях обучающиеся знакомятся с программой дисциплины, методикой работы над учебным материалом и правилами выполнения контрольной работы.

Изучение учебной дисциплины «Математика» рекомендуется в следующем порядке:

1. Ознакомиться с общими методическими указаниями;

2. Внимательно прочитать содержание программы, отметив, о чем студент должен иметь представления, что нужно знать и уметь;

3. Изучить программный материал по рекомендуемой литературе, ответить на контрольные вопросы для самоконтроля;

4. Выполнить контрольную работу.

**2 ПАСПОРТ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**2.1 Результаты изучения дисциплины «Математика»**

В результате изучения дисциплины «Математика» обучающиеся должны освоить соответствующие общие и профессиональные компетенции:

Перечень общих компетенций

|  |  |
| --- | --- |
| Код | Наименование видов деятельности и профессиональных компетенций |
| ОК 01 | Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам |
| ОК 02 | Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности |
| ОК 03 | Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях |
| ОК 04 | Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде |
| ОК 05 | Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста |
| ОК 06 | Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения |
| ОК 07 | Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях |

Перечень профессиональных компетенций

|  |  |
| --- | --- |
| Код | Наименование видов деятельности и профессиональных компетенций |
| ПК 2.4 | Рассчитывать технико-экономические показатели технологического процесса |

В результате освоения учебной дисциплины «Математика» студент должен:

|  |  |
| --- | --- |
| уметь | анализировать сложные функции и строить их графики; |
| выполнять действия над комплексными числами; |
| вычислять значения геометрических величин; |
| производить действия над матрицами и определителями; |
| решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; |
| решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; |
| знать | основные математические методы решения прикладных задач; |
| основы дифференциального и интегрального исчислений; |
| основные методы и понятия математического анализа, линейной алгебры; |
| теории комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; |
| роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности. |

Заключительный этап работы по курсу «Математика» предусматривает написание контрольной работы с привлечением как указанной в пособии, так и найденной самостоятельно дополнительной литературы. Изучение курса рассчитано на один семестр и завершается зачетом (экзаменом).

Форму и сроки проведения аттестации определяет образовательное учреждение. К ней допускаются только те студенты – заочники, которые выполнили все виды учебных работ в соответствии с учебным планом.

**2.2 Объем и содержание УД**

Объем учебной дисциплины «История» и виды учебной работы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вид учебной работы | *Объем часов* | |
| очное | заочное |
| **Максимальная учебная нагрузка (всего)** |  | **72** |
| **Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего):** |  | 20 |
| в том числе: |  |  |
| Лабораторные работы |  |  |
| Практические занятия |  | 16 |
| Курсовой проект |  |  |
| **Самостоятельная работа обучающегося (всего):**  - систематическая проработка конспектов занятий, учебной литературы (по вопросам к параграфам к главам учебных пособий, составленным преподавателям);  - выполнение контрольной работы |  | 52 |
| ***Промежуточная аттестация в форме экзамена (дифференцированного зачёта)*** | | |

Тематический план и содержание учебной дисциплины

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Наименование разделов и тем** | **Содержание учебного материала, практические работы,**  **самостоятельная работа обучающихся** | **Учебные занятия** | **Самостоятельная работа** |
| **РАЗДЕЛ №1** | **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ** | **6** | **21** |
| **Тема №1** | **1.1 Дифференциальное исчисление** | 2 | 7 |
| 1. Дифференциал. Основные правила дифференцирования 2. Исследование функций методом дифференциального исчисления |  |  |
| **1..2 Интегральное исчисление** | 2 | 7 |
| 1. Неопределенный интеграл и его свойства 2. Методы интегрирования. Замена переменной 3. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница. 4. Приложение определенного интеграла. Вычисление площади плоских фигур. 5. Вычисление объемов тел вращения. |  |  |
| **1.3 Комплексные числа** | 2 | 7 |
| 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. 2. Комплексные числа и их геометрическая интерпретация. |  |  |
| **РАЗДЕЛ №2** | **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА** | **3** | **14** |
| **Тема №2** | **2.1 Алгебраический аппарат решения систем линейных уравнений.** | 3 | 14 |
| 1. Матрица. Операции над матрицами. 2. Определители второго и третьего порядка. 3. Решение систем линейных уравнений по формуле Крамера. 4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса |  |  |
| **РАЗДЕЛ №3** | **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ** | **5** | **17** |
| **Тема №3** | * 1. **Вероятность. Теорема сложения вероятностей.** | 2 | 8 |
| 1. Вероятность. 2. Теорема сложения вероятностей. |  |  |
| **3.2 Случайная величина. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.** | 3 | 9 |
| 1. Случайная величина 2. Математическое ожидание случайной величины. 3. Дисперсия случайной величины. |  |  |
|  | **Самостоятельная работа** |  | **52** |
|  | **Итоговая аттестация в форме экзамена** | **6** |  |
|  | **Всего:** | **72** | |

**2.3 Общие рекомендации по самостоятельной работе студентов заочного отделения**

Самостоятельная работа студентов-заочников – это основной метод самоподготовки по освоению учебных дисциплин и овладению навыками профессиональной и научно-исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов-заочников занимает до 90% бюджета времени, отводимого на освоение образовательной программы, и требует постоянного контроля и корректировки.

Главная задача самостоятельной работы студентов – развитие умения приобретать научные знания путем личных поисков, формирование активного интереса и вкуса к творческому, самостоятельному подходу в учебной и практической работе. В процессе самостоятельной работы студент должен научиться глубоко проникать в сущность предмета изучаемой дисциплины, уметь анализировать и приходить к собственным обоснованным выводам и заключениям. Все виды учебных занятий основываются на активной самостоятельной работе студентов. Планирование самостоятельной работы студентов-заочников должно начинаться сразу после установочных лекций.

Базовая самостоятельная работа студентов-заочников может включать следующие формы работы:

* изучение лекционного материала, предусматривающее проработку конспекта лекций и учебной литературы;
* поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников;
* выполнение домашней контрольной работы;
* изучение материала, вынесенного на самостоятельное изучение;
* подготовка к контрольной работе;
* подготовка к зачету или экзамену;

**3 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. ТРЕБОВАНИЯ К ИХ ОФОРМЛЕНИЮ**

Индивидуальные задания выдаются студентам на предыдущей сессии.

Контрольная работа должна включать:

- титульный лист (приложение А);

- содержательную часть: выполнение контрольного задания;

- список использованных источников (приложение Б)

**3.1 Требования к оформлению домашних контрольных работ**

Контрольная работа является самостоятельной работой студента. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Другим критерием является понимание сущности теорем, правил и других теоретических положений.

*Цель выполнения контрольной работы:*

* усвоение теоретического и практического положения курса «Математика»
* закрепление навыков самостоятельного изучения учебного курса;

*Требования, предъявляемые к работе:*

Контрольная работа должна:

* давать представление о степени усвоения материала;
* показать умения студента применять математические формулы и различные способы решения при выполнении заданий;
* отличаться логичностью, аргументированностью;
* быть правильно оформленной и представленной в надлежащие сроки.

Контрольная работа должна быть оформлена в соответствии с настоящими правилами. Работы, без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради в клеточку, чернилами синего цвета, оставляя поля не менее 2,5 см для замечаний рецензента.

На обложку тетради следует наклеить адресный бланк (Приложение А)

Номер варианта контрольной работы, которую выполняет студент, должен совпадать с последней цифрой номера его зачетной книжки.

Решение задач надо располагать в порядке возрастания номеров. Условия задач следует переписывать в тетрадь.

При решении задач нужно обосновывать каждый этап решения исходя из теоретических положений курса.

Решение задач и примеров следует излагать подробно, объясняя все выполненные действия и используемые формулы. Решение каждой задачи должно доводиться до окончательного ответа, которого требует условие.

После контрольной работы должен быть написан список использованных источников. Список использованных источников составляется в алфавитном порядке имен автора (авторов) с указанием выходных издательских данных каждого источника: места его издания, названия издательства и года выпуска. Сборники, не имеющие на титульном листе имен авторов, включаются в общий список по алфавитному расположению заглавия ) см. Приложение Б).

В список литературы включаются лишь те источники, которые непосредственно использованы при написании контрольной работы, но не все те произведения, которые студент прочитал в процессе изучения курса.

Срок представления - за 1 месяц до начала экзаменационной сессии.

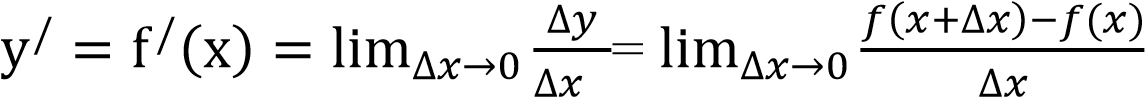
Преподаватель в обязательном порядке даёт консультации по выполнению контрольных работ.

**3.2 Теоретический материал для выполнения контрольной работы и подготовки к зачету (экзамену)**

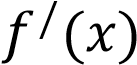
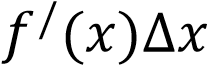
РАЗДЕЛ №1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

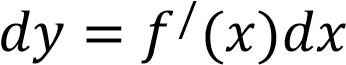
**1. Дифференциал. Основные правила дифференцирования** *Приращением функции* y = f (x) называется разность , где  приращение аргумента x.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента  при произвольном стремлении  к нулю называется производной функции y = f (x) в точке *x* и обозначается одним из символов: *y', f' (x)*. Таким образом, по определению



Если указанный промежуток существует, то функцию f(x) называют дифференцируемой в точке *х*, а операцию нахождения производной  - дифференцированием.

Дифференциалом функции y = f(x) называется произведение производной  этой функции на произвольное приращение аргумента : *dy* = .

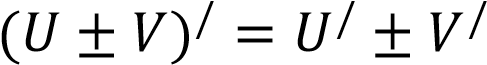
Дифференциал аргумента равен приращению аргумента: *dx* = . Поэтому дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: 

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

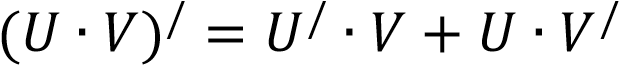
1. Постоянную величину можно выносить за знак производной.

### ( C – число)

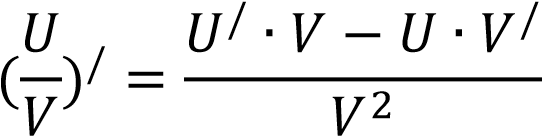
1. Производная суммы или разности



1. Производная произведения

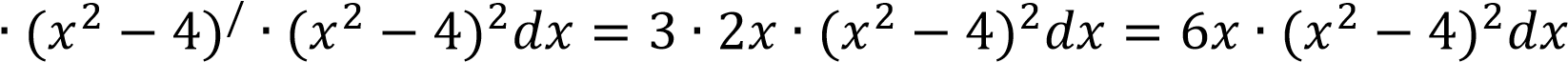


1. Производная частного



**Пример 1.** Найти дифференциал функции:

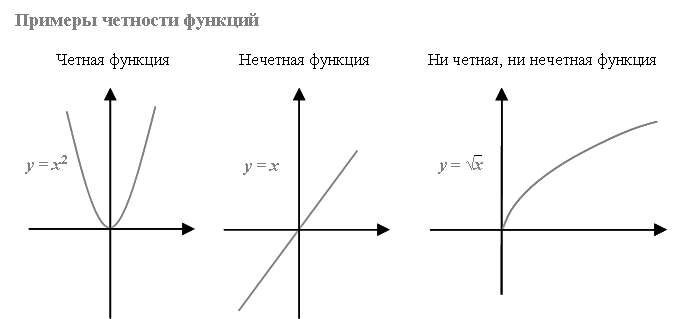
а) *y* = 

*dy* = 3 b) *y = ln sin 2x*

**2. Исследование функций методом дифференциального исчисления** ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ:

1. Область определения функции D(f).
2. Четность, нечетность функции.
3. Точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Интервалы монотонности (возрастания, убывания) и экстремумы функции
5. Точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
6. Асимптоты графика функции.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты.

Рассмотрим отдельно все пункты исследования

1. *Областью определения функции* называется совокупность всех значений независимой переменной *х*, для которых функция *у* определена.
2. *Функция называется четной*, если для нее выполняется равенство

f (-x)=f (x)

График четной функции симметричен оси OY

*Функция называется нечетной*, если для нее выполняется равенство f (-x)= -f (x)

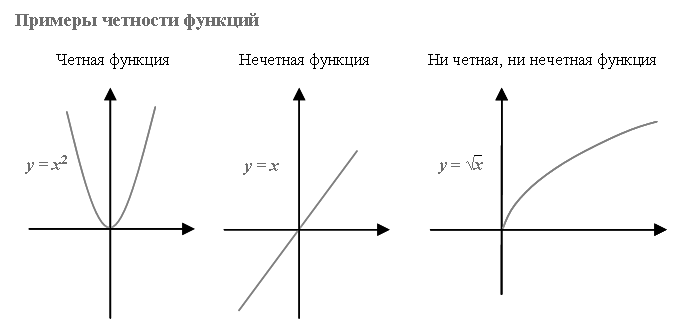
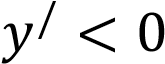


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

1. Чтобы найти точки пересечения с осью ОХ надо в уравнение y=f(x) подставить y = 0. Чтобы найти точки пересечения с осью OY, надо в уравнение y = f(x) подставить *х* = 0.
2. *Функция y = f(x) называется возрастающей*, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция y = f(x) называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастание и убывание функции y = f(x) характеризуется знаком ее производной : если в некотором интервале , то в этом интервале функция возрастает, а если , то функция убывает в этом интервале.

*Точка х0 , х0* *называется точкой максимума (минимума)* функции y = f(x), если существует окрестность *х0 –**, х0 +* *,* такая, что f (x)

Максимум и минимум функции называется экстремумом функции.

Функция y = f(x) функция может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения функции и в которых ее первая производная равна нулю или не существует. Такие точки называют критическими.

max

min

Функция f(x) имеет экстремум max в тех точках, при переходе через которые производная  меняет знак, а сама функция непрерывна. Если меняет знак с «+» на « - «, то *х0* – точка максимума, если меняет знак с «-» на « + «, то *х0* – точка минимума. Если  не меняет знак при переходе через точку *х0*, в этой точке экстремума нет.

1. *График функции y = f(x) называется выпуклым* на интервале (a, b), если в каждой точке этого интервала лежит ниже любой своей касательной. *График функции y = f(x) называется вогнутым* на интервале (a, b), если в каждой точке этого интервала лежит выше любой своей касательной.

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называют *точками перегиба.*

Критическими точками II рода (точками перегиба) называются точки, в которых  равен нулю или не существует. Если в интервале (a, b), то график функции является выпуклым в этом интервале, если в интервале (a, b), то график функции является вогнутым в этом интервале.

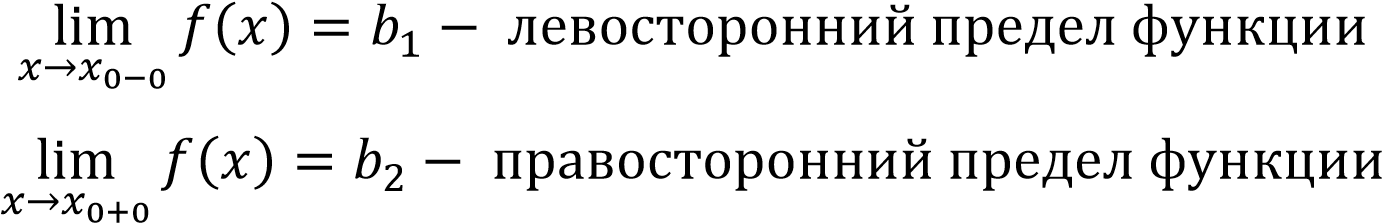
M

N

1. Асимптотой кривой называется прямая, расстояние от которой до точек графика неограниченно уменьшается ( 0) при удалении графика в бесконечность.

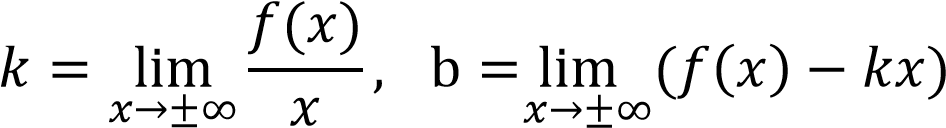
- *Горизонтальная асимптота*. Точки, в которых функция не определена, называются точками разрыва функции.

Пусть *х0* – точка разрыва функции y = f(x)

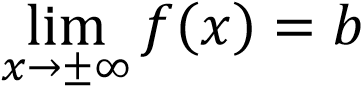


Если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, то говорят, что прямая *х = х0* является вертикальной асимптотой графика функции.

*Прямая y = kx + b называется наклонной асимптотой ,* где параметры *k* и *b* определяются формулами



Прямая *y = b* называется горизонтальной асимптотой, если существует

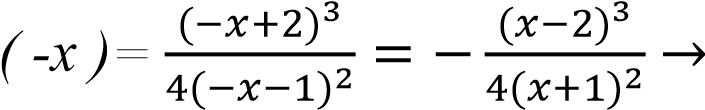


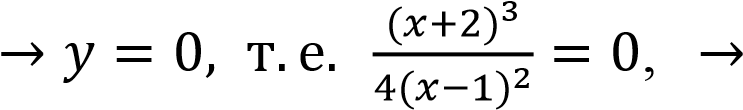
**Пример 2.** Исследуйте функцию и постройте график

1. *Область определения функции.*

Функция не определена, если *х* - 1 = 0 (*х* = . Функция определена и непрерывна на всей оси ОХ за исключением точки *х* = 1, т.е. *х*

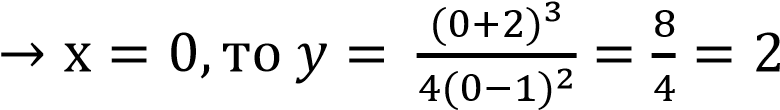
1. *Четность, нечетность функции.*

*f*  функция не является четной и нечетной.

1. *Точки пересечения с осями координат.* Точки пересечения с осью ОХ : 

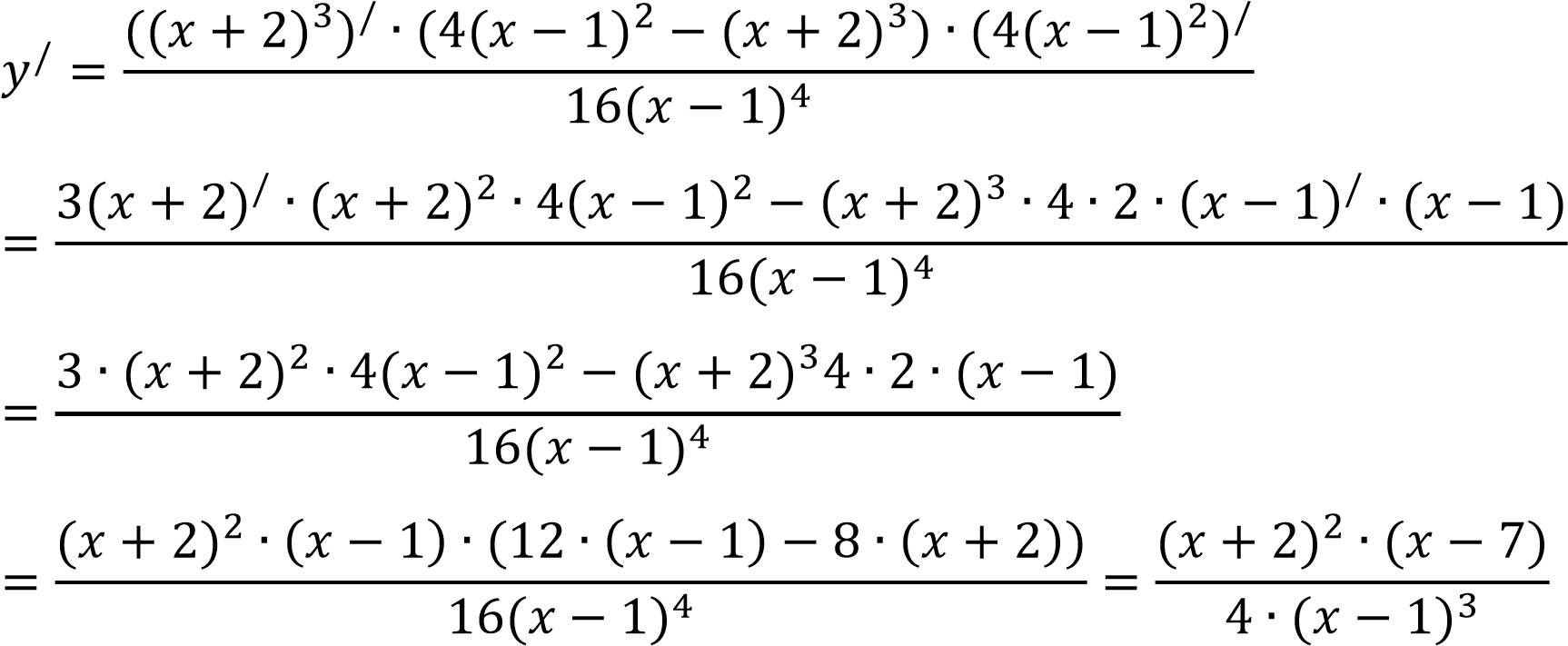
  точка пересечения с осью ОХ (- 2;0)

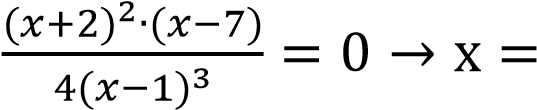
Точки пересечения с осью OY:

, координата точки пересечения с осью OY (0; 2).

1. *Монотонность функции и точки экстремума.*

Для исследования функции на монотонность, найдем производную:



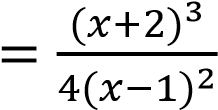
Найдем точки возможного экстремума =0, т.е. 

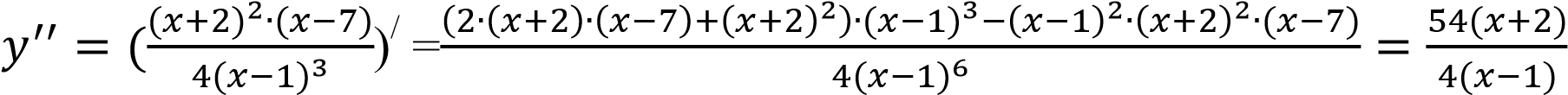


Производной не существует при *х* = . Составим таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | (- | -2 | (-2; 1) | 1 | ( 1; 7) | 7 | ( 7; + |
|  | + | 0 | + | не сущ. | - | 0 | + |
| *y* |  | 0 |  | не сущ. |  |  |  |
|  | возраст. |  | возраст. |  | убывает | min | возрастает |

1. *Интервалы выпуклости, точки перегиба.*

Найдем вторую производную функции y



 при *х* = - 2,  не существует при *х* = 

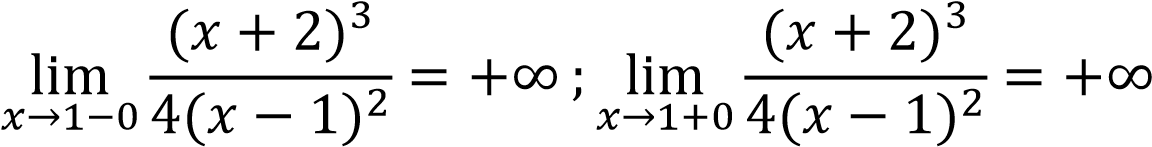
Составим таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (- | -2 | (-2; 1) | 1 | ( 1;+ |
|  | - | 0 | + | не сущ. | + |
| *y* |  | 0 |  | не сущ. |  |

Точка ( -2; 0) – точка перегиба.

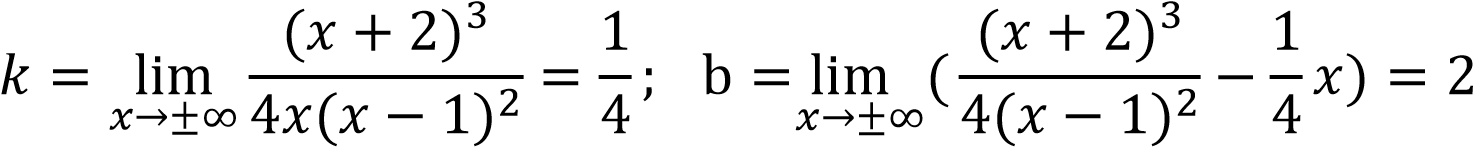
1. *Асимптоты графика функции.*

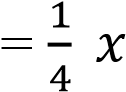
Точка разрыва функции *х* = 1:



Следовательно, прямая х = 1 – вертикальная асимптота.

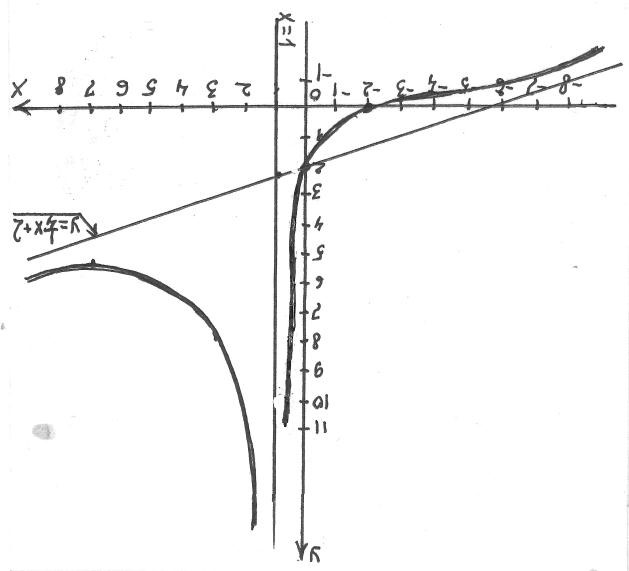
Найдем наклонную асимптоту y *= kx + b*



Следовательно, y  + 2 – наклонная асимптота.

1. Построим график функции. Найдем дополнительные точки:

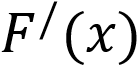
у(-3)  ; у (3) 

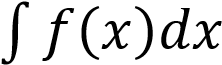


**3. Неопределенный интеграл**

Пусть функция f(x) непрерывна на области определения.

*Первообразной функции f(x)* будем называть функцию F(x), производная которой равна f(x):

 = f (x)

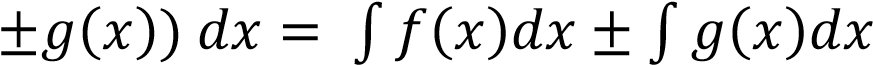
*Неопределенным интегралом* от функции f(x) будем называть множество всех первообразных функции f(x),т. е. выражение F(x)+C, где F(x) – одна из первообразных функции f(x), С - произвольная постоянная. Обозначим символом 

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ:

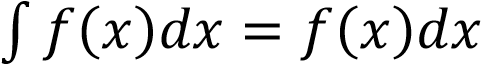
1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

### , k –константа

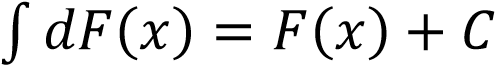
1. Интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов

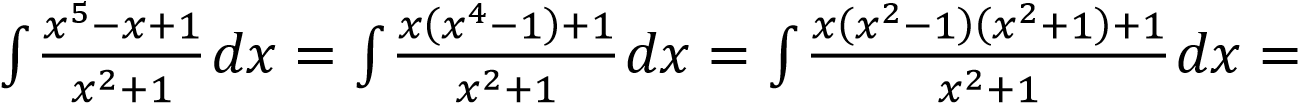
*f (x)*

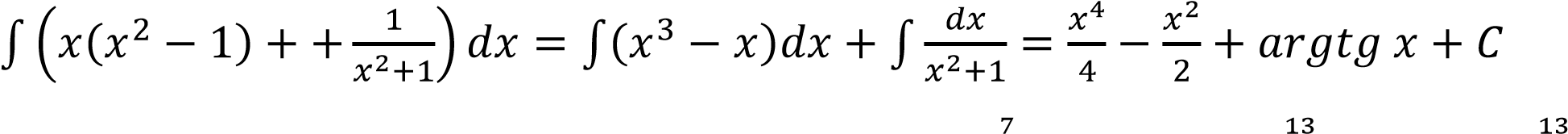
1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

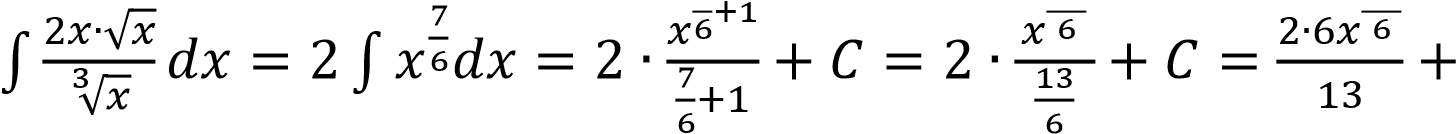
*d*

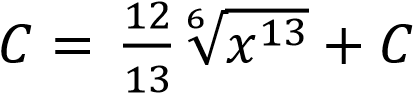
4. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной



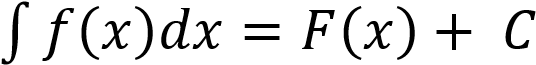
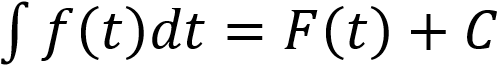
**Пример3**. 



**Пример4.** 



МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ.

Метод замены переменной, или подстановки в его основе, лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается следующем: если, то 

*Алгоритм нахождения интеграла методом подстановки:*

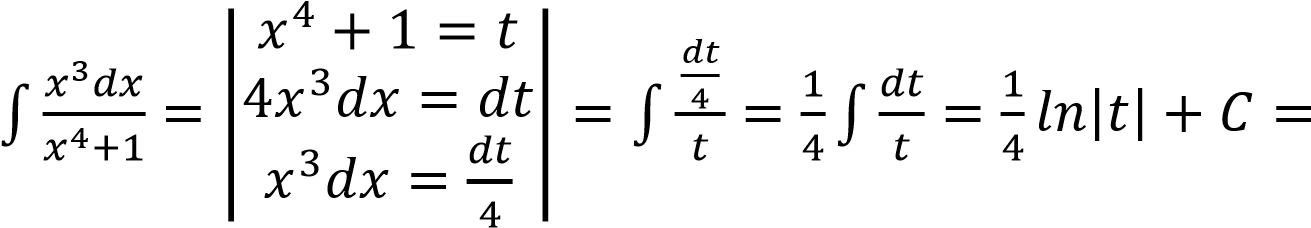
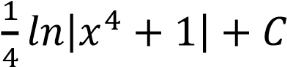
1. Заменить часть подынтегральной функции новую переменную(t)

2.Продифференцировать полученное равенство.

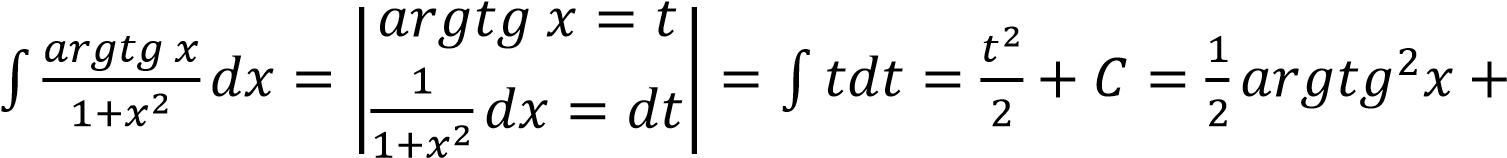
3.Заменить в данном интеграле подынтегральное выражение на новые полученные переменные.

1. Найти полученный интеграл.
2. Подставить вместо переменных (t) данные переменные.

**Пример5.**

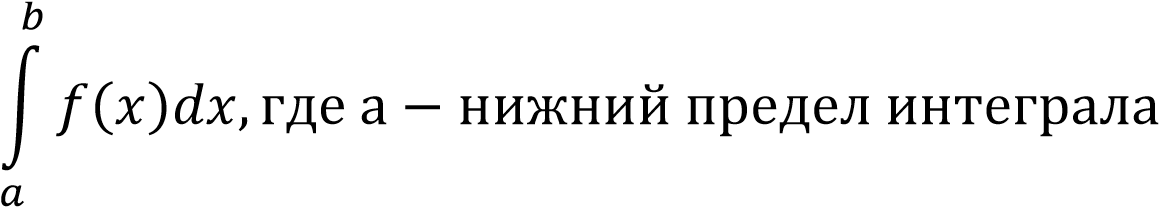


**Пример6.**



**4. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница**

Приращение F(b) – F(a) любой из первообразных функций F(x) +C при изменении аргумента от *х = а* до *х = b* называется *определенным интегралом* и обозначается



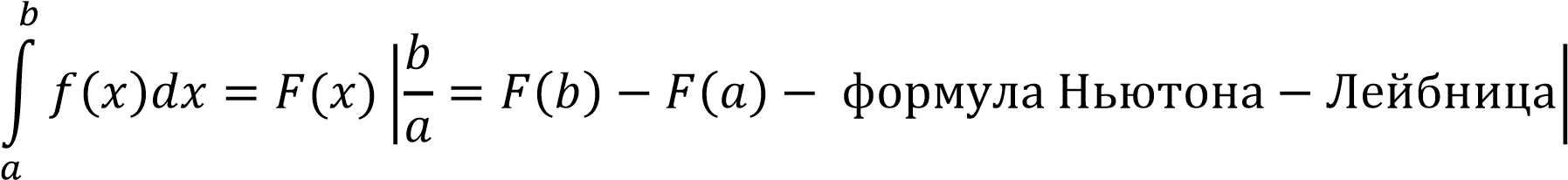
b – верхний предел интеграла

f (x) – подынтегральная функция

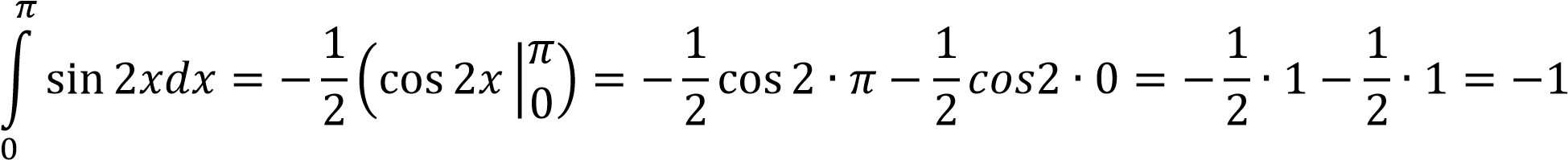
f (x)dx – подынтегральное выражение

*Для вычисления определенного интеграла необходимо:*

1. Найти соответствующий неопределенный интеграл.
2. В полученное выражение подставить вместо *х* сначала верхний предел, затем нижний предел.
3. Из первого результата подстановки вычесть второй результат.

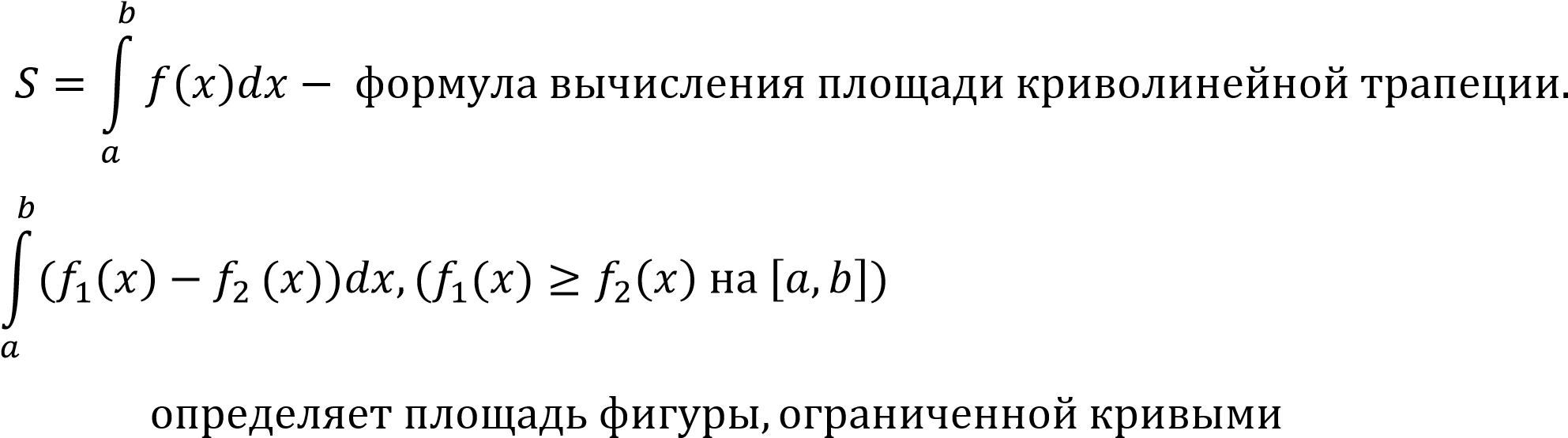


**Пример 7.**



ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции y=*f(x) (f(x)*прямыми *х = а и х = b* и отрезком  называется *криволинейной трапецией.*

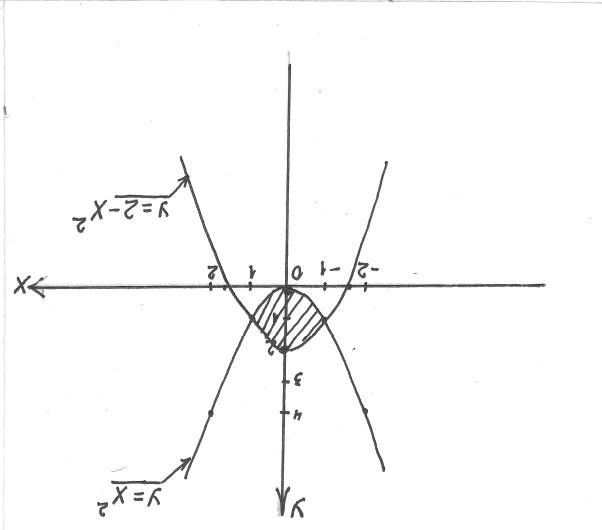


 и прямыми *x = a, x =b*

**Пример 8.** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

у = ; у = 2-

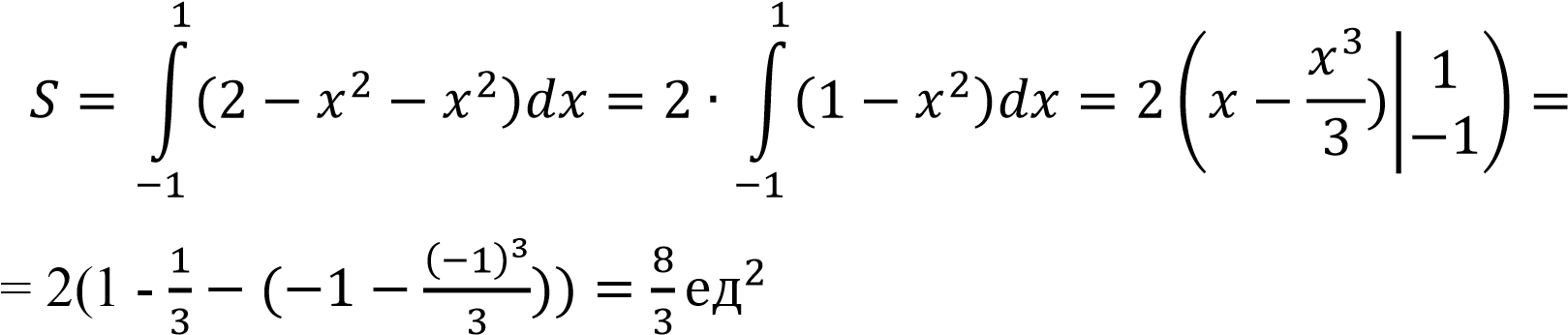
Построим графики функций



Найдем пределы интегрирования

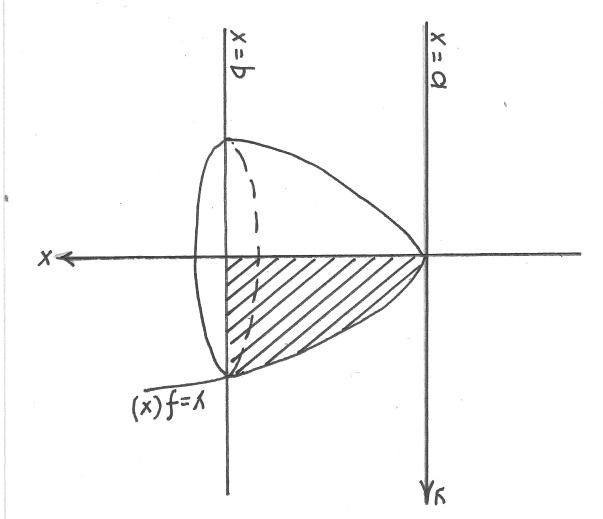


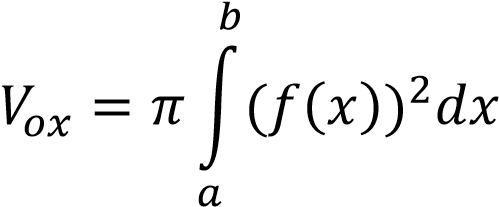
*x1* = -1, x2=1



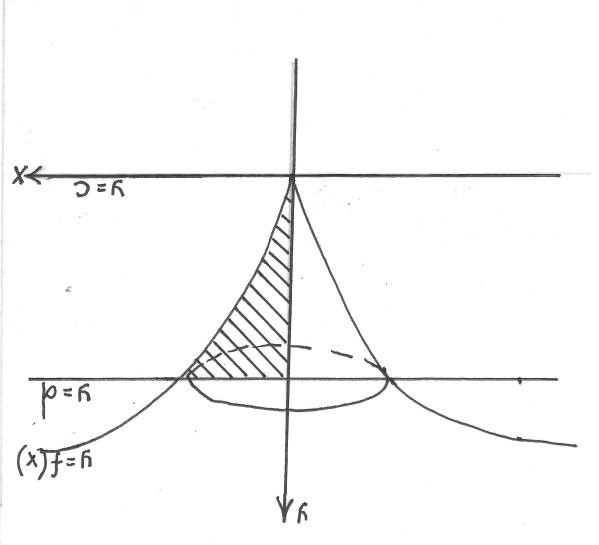
ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми *х = а, х = b*, непрерывной кривой *y = f(x)*

и осью абсцисс вычисляется по формуле



Объем тела, образованного вращением вокруг оси ОY криволинейной



трапеции, ограниченной прямыми

*y*

*=*

*c*

*,*

*y*

*=*

*d*

, непрерывной кривой

*x*

*=*

*g*

*(*

*y*

*)*

и

осью ординат вычисляется по формуле

∫

(

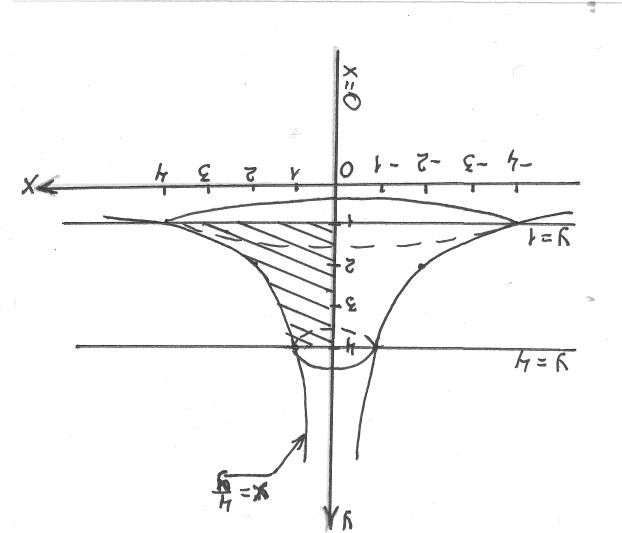
(

)

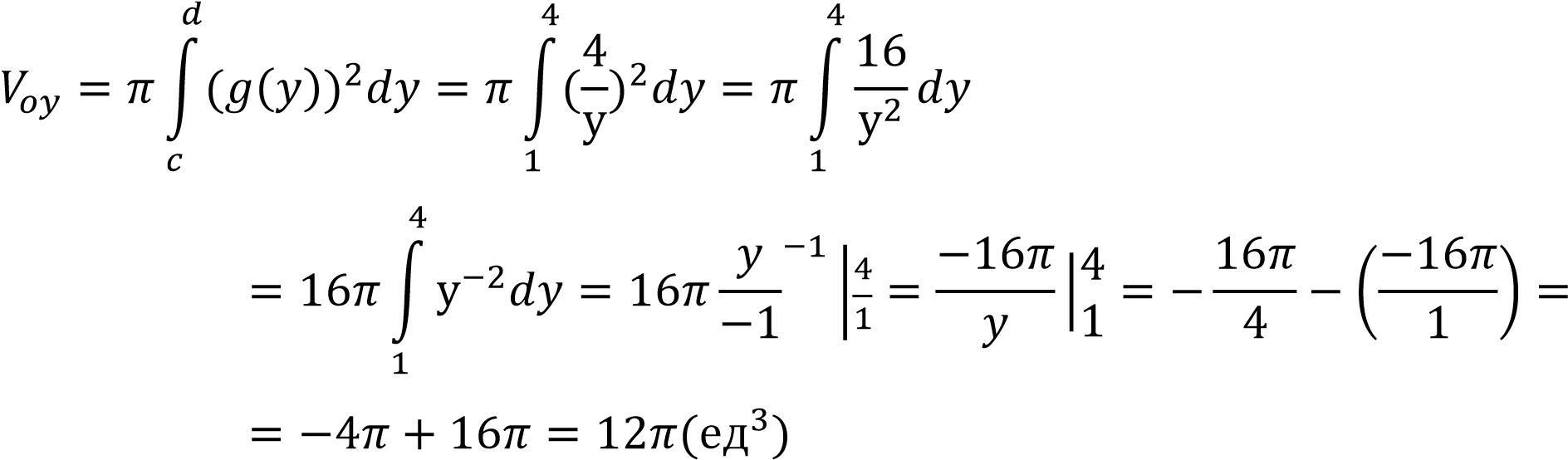
)

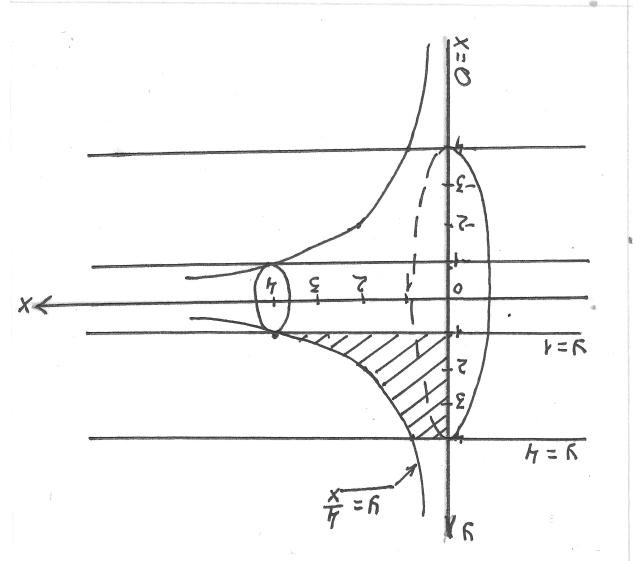
**Пример 9**. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями *xy = 4; у = 1; у = 4; х = 0*

Построим графики всех данных функций.

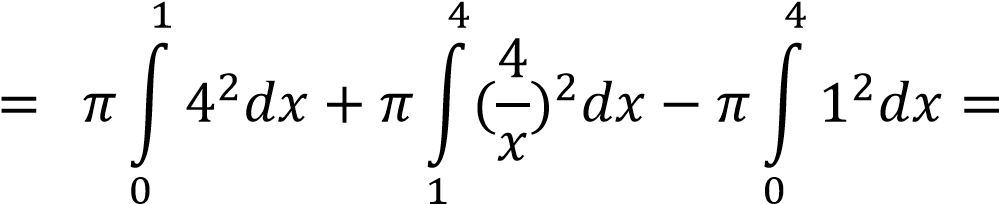


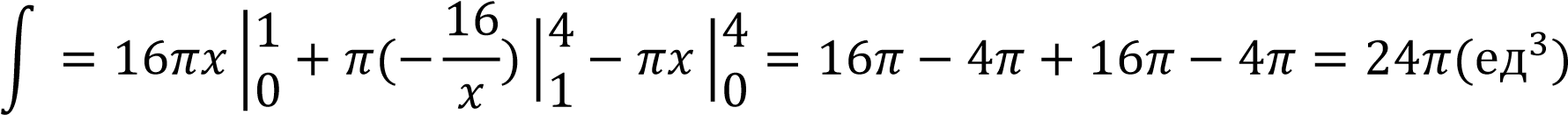
Найдем объем тела, полученного при вращении фигуры вокруг оси ОУ по формуле



Найдем объем тела, полученного при вращении фигуры вокруг оси ОХ

### V =





**5. Комплексные числа**

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В

### АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

*Комплексным числом z* называется выражение вида *z = a + bi*, где *a, b-* действительные числа, *i* – мнимая единица, *i* 

Выражение вида *z = a + bi* – называют алгебраической формой записи комплексного числа.

Два комплексных числа *z = a + bi* и  *z = a – bi* называют *сопряженными*

1. Суммой двух комплексных чисел  называют комплексное число 
2. Произведением двух комплексных чисел  называют комплексное число 



1. Вычитание комплексных чисел вводится как операция, обратная сложению.
2. При делении двух комплексных чисел необходимо числитель и знаменатель умножить на число сопряженное знаменателю.



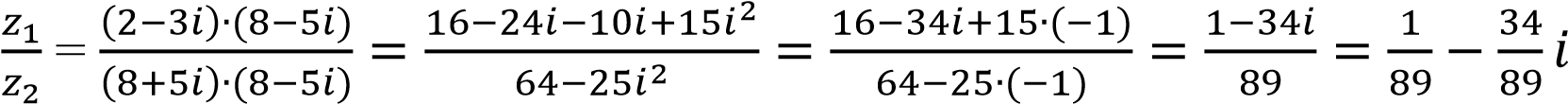
 

**Пример 10.**





**Пример 11.** Найти частное , если 



### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРИТАЦИЯ

Всякое комплексное число *z = a + bi* можно изобразить на плоскости

Оху точкой М с координатами (a, b) или в виде вектора , начало которого совпадает с началом координат, а конец вектора с точкой М(a, b). Ось ОХ при изображении действительных чисел называется действительной осью, ось ОУ – мнимой.

y М(а,b)

r

Обозначим через угол между положительным направлением оси ОХ и вектором, а через r – длину этого вектора. Тогда

a = r

Следовательно, комплексное число *z* можно представить в виде *z = a + bi* *= r*cos  = *r*

Такая форма записи комплексного числа называется тригонометрической.

*r*  – модулем комплексного числа,  – аргумент комплексного числа.

Главное значение аргумента *z* при различных значениях *a* и *b* можно найти по таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *a* | *b* | *arg z* |
| *a* | *b- любое число* | *arctg* |
| *a = 0* |  |  |
| *a = 0* |  | *-* |
| *a= 0* | *b = 0* | *неопределено* |
| *a* |  |  |
| *a* |  | *arctg* |

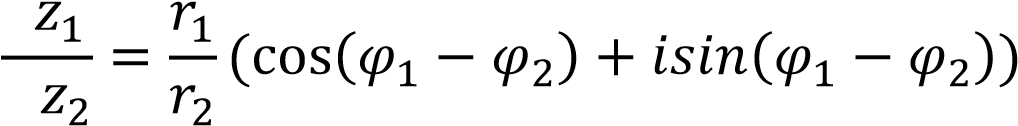
ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В

### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. Произведением двух комплексных чисел в тригонометрической форме

 называется комплексное число 

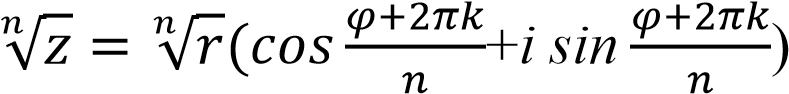
1. Частным двух комплексных чисел называется комплексное число

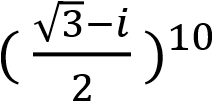


1. Формула Муавра



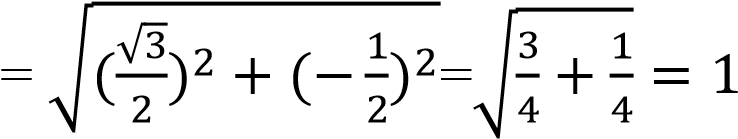
1. Извлечение корня *n* – ой степени из комплексного числа

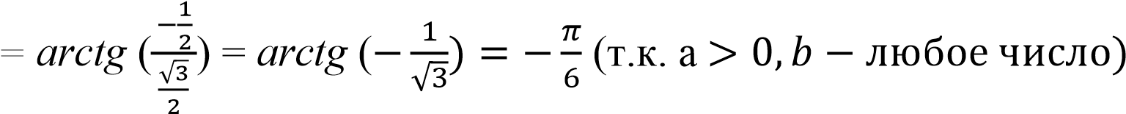
, где *k = 0, 1, 2,…, n-1*

**Пример 12.** Вычислить 

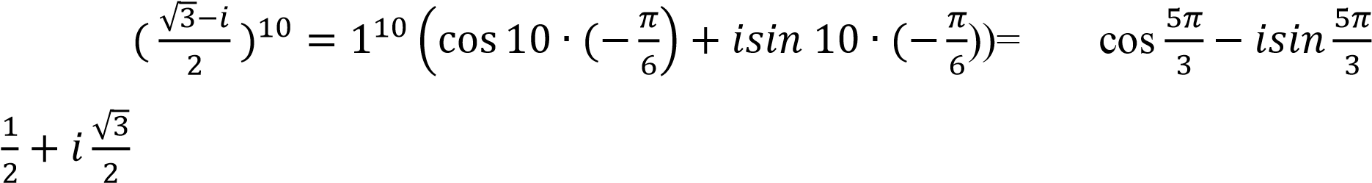
Чтобы вычислить, необходимо записать число в тригонометрической форме, а для этого надо найти модуль и аргумент комплексного числа. Преобразуем выражение

### , следовательно *a*

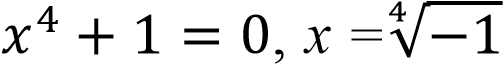
*r* 

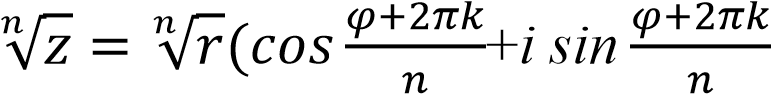
По таблице найдем

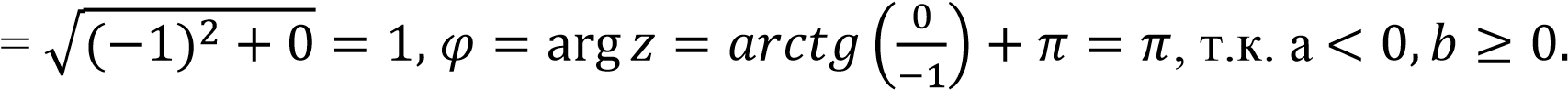
*arg z*

Следовательно

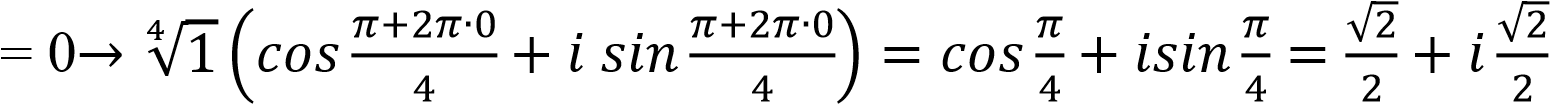
=

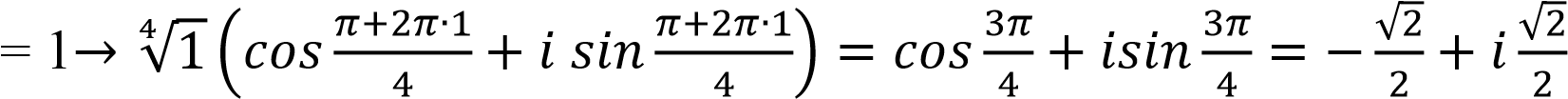
**Пример 13.**Решите уравнение . Воспользуемся формулой

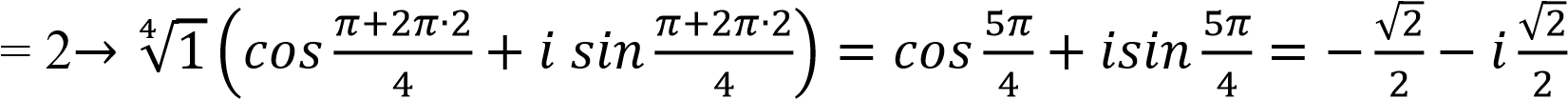
), где *k = 0, 1, 2,…, n-1*

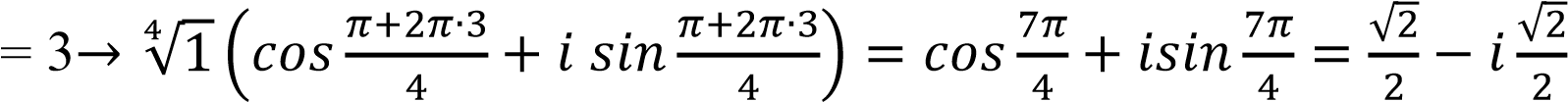
*r* 

*k* =0, 1, 2, 3.

*k* 

*k* 

*k* 

*k* 

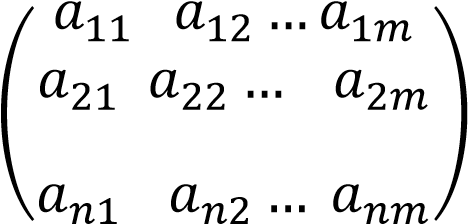
**Пример 14**. Решить уравнение

;

РАЗДЕЛ №2 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**1. Алгебраический аппарат решения систем линейных уравнений** МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ.

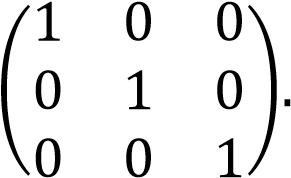
*Матрицей размерности n* будем называть числовую таблицу из *n* строк и *m* столбцов.



Матрицы обозначаются А; В; С … .  - элементы матрицы, где *i* – номер строки*, j* – номер столбца.

Матрица размерности *n*называется *квадратной матрицей*.

Матрица Е называется единичной матрицей, у которой по диагонали из верхнего левого в нижний правый угол стоят единицы, а остальные все нули.

Е для любой матрицы А, то есть Е = 

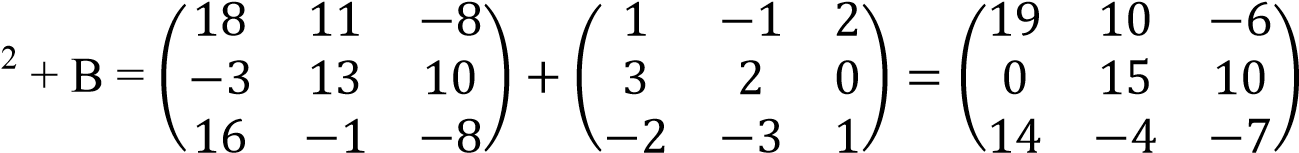
#### ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

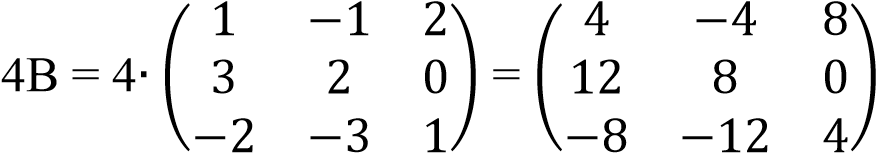
1. *Умножение матрицы на число.* Необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.
2. *Сложение (вычитание) матриц.* Сложить (вычесть) соответствующие элементы матриц. Складывать (вычитать) можно матрицы лишь одной размерности.
3. *Произведение двух матриц*. Умножать матрицы можно лишь в том случае, если число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя.

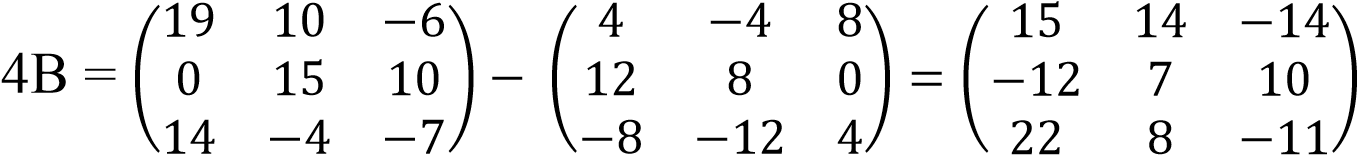
**Пример 15.** Вычислите С = (А2 +В) – 4В, если

;

Решение:

А

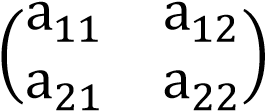


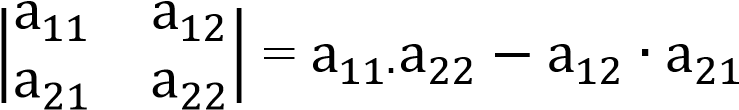
С = (А2 +В) – 

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГОПОРЯДКА

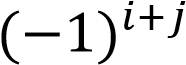
Понятие определителя вводится лишь для квадратных матриц.

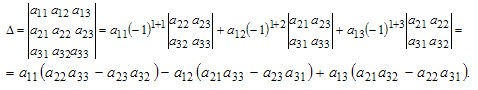
Обозначается .

*Определителем матрицы второго порядка*  называется число 

То есть .

Определитель матрицы третьего порядка можно вычислять с помощью определителя второго порядка. *Определитель матрицы* равен сумме произведения элементов какой - либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

*Алгебраическим дополнением* элемента *aij* называется число, равное произведению  на определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием *i* – строки*, j* – столбца.



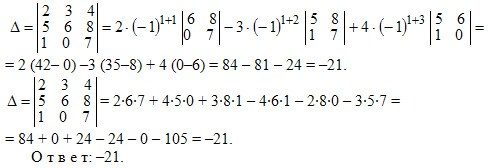
#### СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. Если одна из строк (столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.
2. От перестановки двух строк (столбцов) определитель меняет только знак.
3. Определитель, содержащий две одинаковые строки ( столбца), равен нулю.
4. Если все элементы некоторой строки ( столбца) определителя умножить на число *k* , то сам определитель умножится на это число.

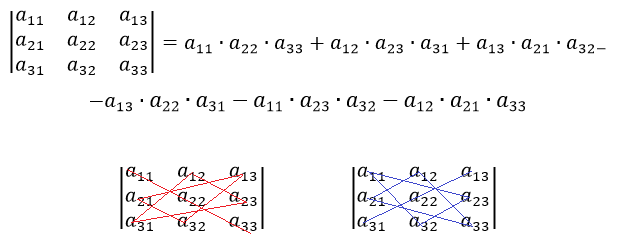
**Примеры 16**. Вычислите определитель:

C:\Users\Людмила\Pictures\математика\9c47d65252.jpg

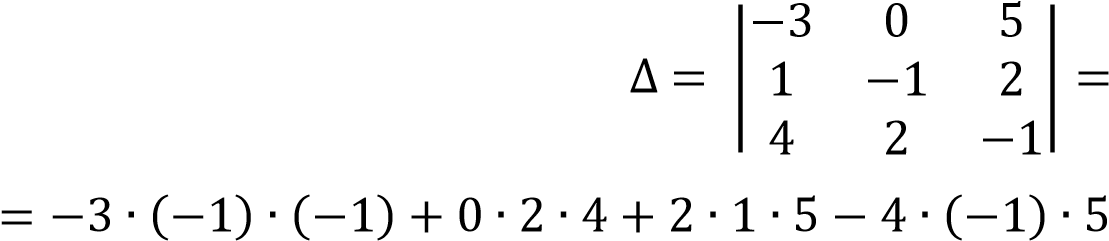
Решение:



#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПО ПРАВИЛУ ТРЕУГОЛЬНИКА



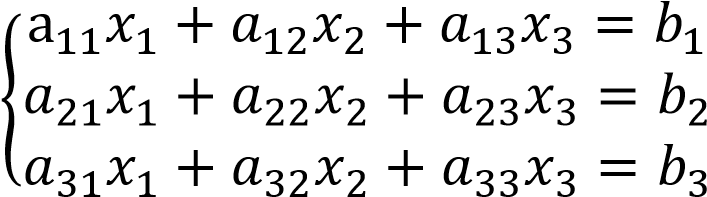
**Пример 17**. Вычислить определитель по правилу треугольника.



= - 3 + 0 + 10 + 20 – 0 + 12 = 39

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Рассмотрим систему



Здесь:  – неизвестные;  – коэффициенты при неизвестных;  - свободные члены.

*Решением системы* будем называть набор из *m* чисел, при подстановке которых в каждое уравнение системы, получается верное тождество.

Матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных, будем называть *основной матрицей системы*.

Если к основной матрице добавить столбец свободных членов, то получим *расширенную матрицу системы.*

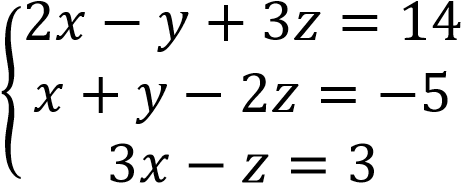
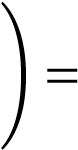
*Метод Гаусса* в решении систем линейных уравнений заключается в преобразовании расширенной матрицы к эквивалентной ей матрице ступенчатого вида с помощью элементарных преобразований.

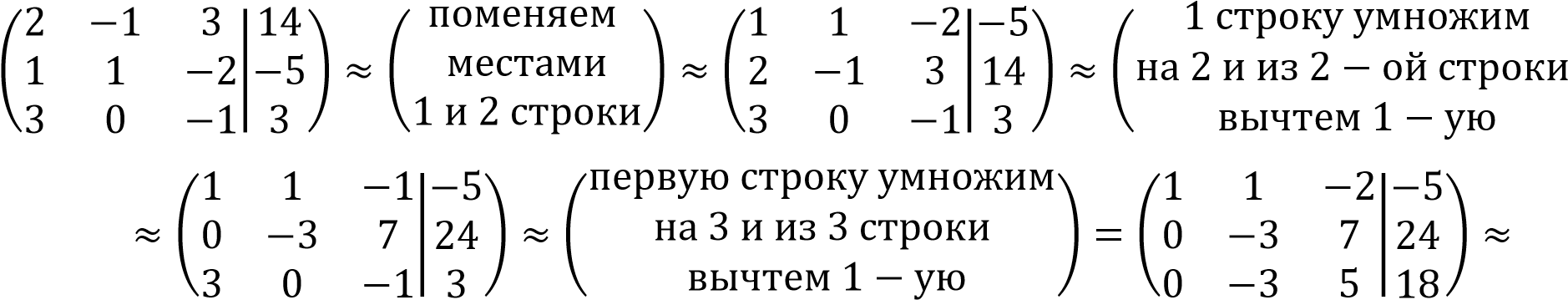
*Элементарные преобразования.*

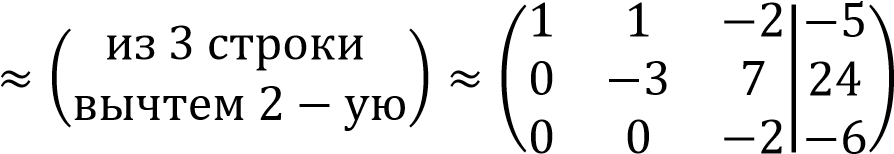
1. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
2. Сложение (вычитание) двух строк (столбцов) матрицы. При вычитании изменяется строка из которой вычитаем.
3. Перестановка строк (столбцов) матрицы. 4. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

Матрица, полученная из данной с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* данной.

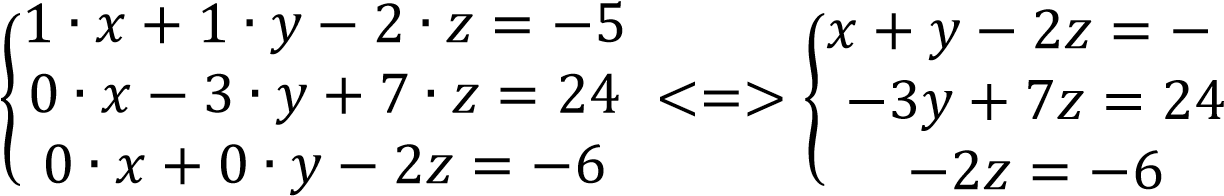
**Пример 18**. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса



Решение: Запишем расширенную матрицу системы:



По полученной матрице ступенчатого вида составляем эквивалентную

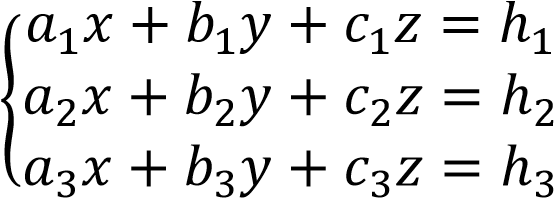
систему:

Из третьего уравнения системы *z* = 3. Подставим значение *z* во второе уравнение и получим *y* = -1. Подставим значения *z* и *y* в первое уравнение и найдем *x* = 2.

Решение системы (2; - 1; 3)

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛЕ КРАМЕРА

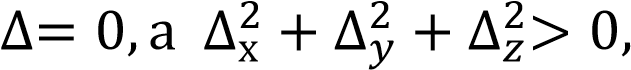
Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными *x; y; z*:



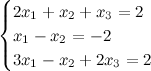
Для решения воспользуемся формулами Крамера: ; ; , где

,

Выясним, при каких условиях система имеет единственное решение, решение может быть больше одного, и когда система не имеет решений.

1. Если определитель системы , то система имеет единственное решение.
2. Если  то система не имеет решений.
3. Если то система имеет бесконечное множество решений.

**Пример 19.** Решить систему линейных уравнений по формуле Крамера



**Решение.** Вычисляем определитель матрицы системы:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_988.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_989.png

Так как определитель матрицы системы неравен нулю, то по теореме Крамера система совместна и имеет единственное решение. Для его нахождения вычислим следующие определители:

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1004.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1005.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1006.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1007.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1008.png

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1009.png

Таким образом,

http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1010.png    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1011.png    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/slau/formules_1012.png

**Ответ.** 

РАЗДЕЛ №3 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

**1. Вероятность. Теорема сложения вероятностей**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ИСПЫТАНИЕ, СОБЫТИЕ,

#### СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Под *испытанием* (*опытом*) в теории вероятностей принято понимать наблюдение какого-либо явления при соблюдении определенного комплекса условий, который должен каждый раз строго выполняться при повторении данного испытания. Если то же самое явление наблюдается при другом комплексе условий, то это уже другое испытание.

Когда речь идет о соблюдении комплекса условий данного испытания, имеется в виду постоянство значений всех факторов, контролируемых в данном испытании. Но при этом, как правило, имеет место большое число неконтролируемых факторов, которые трудно или невозможно учесть.

Результаты испытаний можно охарактеризовать качественно и количественно.

Качественная характеристика заключается в регистрации какого-либо явления, которое может наблюдаться или не наблюдаться при данном испытании. Любое из этих явлений называется в теории вероятностей *событием*.

События делятся на:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **невозможные**  (в результате опыта никогда не произойдут), | **достоверные**  (в результате опыта происходят всегда), | **случайные**  (в результате опыта событие может произойти или не произойти). |

Теория вероятностей рассматривает именно случайные события. При этом предполагается, что испытание может быть повторено неограниченное (по крайней мере, теоретически) число раз. Например, выполнение штрафного броска в баскетболе есть испытание, а попадание в кольцо — событие.

Другим примером события, часто приводимым в учебниках по теории вероятностей, является выпадение определенного числа очков (от 1 до 6) при бросании игральной кости.

События в теории вероятностей принято обозначать начальными прописными латинскими буквами А, В, С, ...

Случайные события называются *несовместными* если появление одного исключает появление другого. В противном случае они называются *совместными*.

Если в результате опыта произойдет хоть одно из некой группы событий, то они образуют *полную группу*. Появление хотя бы одного события из полной группы – достоверное событие.

Если, по условиям испытания нет никаких оснований предполагать, что один из исходов появляется чаще других, то все исходы являются *равновозможными.*

Два события называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности другого.

Количественная характеристика испытания состоит в определении значений некоторых величин, которыми интересуются при данном испытании (например, число подтягиваний на перекладине или время на беговой дистанции). В силу действия большого числа неконтролируемых факторов эти величины могут принимать различные значения в результате испытания. Причем до испытания невозможно предсказать значение величины, поэтому она называется *случайной величиной*.

#### ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Вероятность какого- либо события – численное выражение возможности его наступления.

В некоторых простейших случаях вероятности событий могут быть легко определены непосредственно исходя из условий испытаний.

Представим себе общую схему таких испытаний.

Пусть испытание имеет *n* возможных несовместных исходов, т. е. отдельных событий, могущих появиться в результате данного испытания; причем при каждом повторении испытания возможен один и только один из этих исходов. Кроме того, пусть по условиям испытания, нет никаких оснований предполагать, что один из исходов появляется чаще других, т. е. все исходы являются равновозможными.

Допустим теперь, что при *n* равновозможных несовместных исходах интерес представляет некоторое событие А, появляющееcя при каждом из *m* исходов и не появляющееся при остальных *n*–*т* исходах. Тогда принято говорить, что в данном испытании имеется *п* случаев, из которых *т* благоприятствуют появлению события А.

Вероятность события А равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию А, к общему числу всех равновозможных несовместных исходов опыта:

 (1)

Формула (1) представляет собой так называемое *классическое определение вероятности* по Лапласу, пришедшее из области азартных игр, где теория вероятностей применялась для определения перспективы выигрыша.

*Статистическое определение вероятности*.

Будем фиксировать число испытаний, в результате которых появилось некоторое событие А. Пусть было проведено *N* испытаний, в результате которых событие А появилось ровно *nN* раз. Тогда число *nN* называется частотой события, а отношение — относительной частотой события.

Число *Р(А)*, связанное с событием А, называется вероятностью события А.

Математически неограниченное число повторений испытания записывается в виде предела (*lim*) при *N*, стремящемся к бесконечности (∞):



Поскольку *nN* никогда не может превзойти *N*, то вероятность оказывается заключенной в интервале 

Следует отметить, что приведенное определение вероятности является абстрактным, оно не может быть экспериментально проверено, так как на практике нельзя реализовать бесконечно большое число повторений испытания.

Пусть проводятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события А неизменна. Справедливо утверждение, называемое *законом больших чисел* или *теоремой Бернулли*: если *N* достаточно велико,

то с вероятностью сколь угодно близкой к единице, отличие от *Р(А)* меньше любого наперед заданного положительного числа или, в сим-

вольной записи, . Т.е. много раз бросая монету, мы ―почти наверняка будем получать примерно равные частоты выпадения герба и цифры.

#### ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

Вначале введем понятие ―поле событий‖ как совокупности всех случайных событий данного испытания, для которых определены вероятности. На (рис. 2) поле событий изображено в виде заштрихованного прямоугольника.

1. Сумма (объединение) событий (рис.3) представляет собой сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А и В. Объединение событий обозначается как , или .
2. Произведением (пересечением) событий А и В называется их совместное появление (рис. 4). Обозначается произведение событий как , или .
3. Достоверным событием называется событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания (рис.5). Оно обозначается обычно как Е.
4. Невозможное событие – событие, которое не может произойти в результате данного испытания. Принятое обозначение – .
5. Несовместными называются события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе (рис. 6). Примеры несовместных событий: попадание и промах при выстреле, выпадение двух и трех очков при бросании игральной кости. Рис. 6 наглядно показывает, что для несовместных событий .
6. Противоположным к А событием называется событие, состоящее в не появлении события А. Обозначается противоположное событие символом Примеры противоположных событий: промах и попадание при выстреле, выпадение герба или цифры при одном подбрасывании монеты.

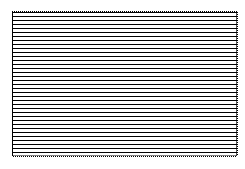
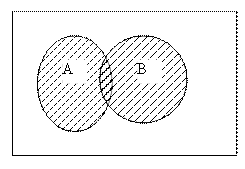
 

Рисунок 2 - Поле событий Рисунок 3 - Сумма событий

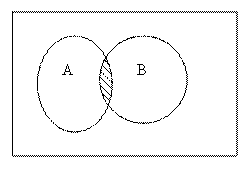


Рисунок 4 -Произведение событий

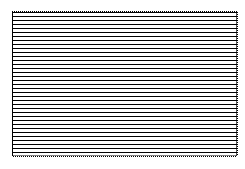


Рисунок 5 -Достоверное событие

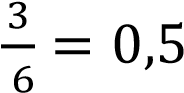


Рисунок 6 - Несовместные события

**Пример 20**

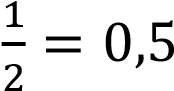
Испытание состоит в подбрасывании игральной кости, на каждой из граней которой проставлено число очков (от 1 до 6). Какова вероятность того, что: 1) выпадает 2 очка? 2) выпадает нечетное число очков?

*Решение 1***:** В данном испытании имеется 6 равновозможных случаев (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков), так как нет оснований предполагать, что появление какого-то определенного числа очков более вероятно (если, конечно, кость симметрична). Поэтому вероятность выпадения любого числа очков, в том числе и 2, при одном подбрасывании равна .

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют три случая (выпадение 1, 3 и 5), поэтому по формуле (3.1) получаем Р(А) = .

*Решение 2:* В данном испытании имеется 2 равновозможных исхода (выпадение четного числа очков (т.е. 2, 4, 6) и нечетного), так как кость симметрична, то очевидно, что эти исходы равновозможные.

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют 1 случай из двух, поэтому по формуле (1) получаем

Р(А) = 

Отметим, что построенную таким образом пространство элементарных событий непригодно для расчета вероятности того, что выпадает 2 очка, так как этому событию не благоприятствует не один из введенных нами элементарных исходов.

**Пример 21**

В урне 5 белых и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

*Решение.* В этом примере имеется 15 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, причем ожидаемому событию (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому искомая вероятность составит .

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ

Ниже приведены основные правила, позволяющие определить вероятность появления сложного события на основании известных вероятностей составляющих его более простых событий.

1. *Вероятность достоверного события* равна единице:

Р(Е)=1 . (2)

1. *Вероятность объединения (суммы) несовместных событий* равна сумме их вероятностей:

Р(*А* *А* *А* *Р* *А**Р* *А**Р* *А* (3)

Эти два равенства являются аксиомами теории вероятностей, т. е. принимаются в качестве исходных, но требующих доказательства свойств вероятностей. На их основе строится вся теория вероятностей.

Все остальные, приведенные ниже без доказательств формулы могут быть выведены из принятых аксиом.

1. *Вероятность невозможного события* равна нулю:

Р()=0 (4)

1. *Вероятность события, противоположного* событию А, равна

Р(*А*) *Р* *А* (5)

Формула (3.5) оказывается полезной на практике в тех случаях, когда вычисление вероятности непосредственно события *А* затруднительно, в то время как вероятность противоположного события находится просто (см. ниже п.**9**).

1. *Теорема сложения вероятностей*. Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

Р(АВ)=Р(А)+Р(В) - Р(АВ) (6)

Для несовместных событий Р(АВ)=0 и формула (6) переходит в (3).

1. *Условная вероятность.* Если требуется найти вероятность события *В* при условии, что произошло некоторое другое событие *А*, то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности Р*В* *А*. Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий *А* и *В* к вероятности события *А*:

Р (7)

*Р**А*

В тех случаях, когда события *А* и *В* несовместны, Р(АВ)=0 и соответственно Р*В* *А*.

1. Определение условной вероятности в виде (7) дает возможность записать следующую формулу для вычисления вероятности произведения событий(*теорема умножения вероятностей*)

Р(АВ) =Р(А)*Р* *В* *А* *Р* *В* *Р* *А* *В* (8)

1. Поскольку вероятность события *А* (или *В*) для независимых событий по определению не изменяется при появлении другого события, то условная вероятность Р*А* *В* совпадает с вероятностью события *А*, а условная вероятность Р*В* *А* — с *Р(В)*. Вероятности *Р(А)* и *Р(В*) в отличие от условных вероятностей называются безусловными.

Р*А* *В* *Р* *А* *Р* *В* *А* *Р* *В* (9)

*Теорема умножения вероятностей для независимых событий* записывается следующим образом:

Р(*А* *А**А* *Р* *А* *Р* *А* *Р* *А* (10)

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

1. Вычислим *вероятность появления хотя бы одного события в n испытаниях*

*А* – появление в *n* испытаниях **хотя бы** один раз интересующего нас события.

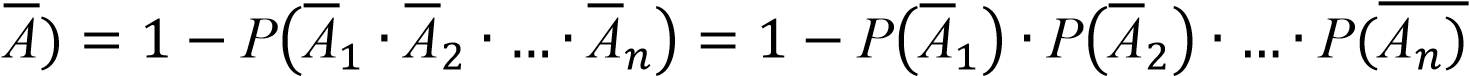
*А* – интересующее нас событие не появилось в *n* испытаниях **ни разу**.

*А*1 – интересующее нас событие появилось в первом испытании.

*А*2 – интересующее нас событие появилось во втором испытании.

….

*А*n – интересующее нас событие появилось в *n*-ом испытании.

Р(А)=1- Р(

(3.11)

1. *Формула полной вероятности*.

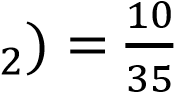
Если событие *А* может произойти только при появлении одного из несовместных событий *Н1, Н2, …, Нn*, то

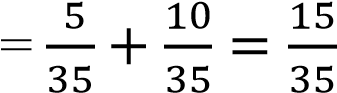
Р(А)=Р(*Н**Р* *А* *Н*Р *Н* *Р* *А* *Н*Р *Н* *Р* *А* *Н* (12)

**Пример 22**

В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

*Решение.* Пусть событие *А* – появление белого или черного шара. Разобьем это событие на более простые. Пусть *В*1 – появление белого шара, а *В*2 – черного. Тогда, *А=В1+В2* по определению суммы событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1+В2)*. Так как *В1*и *В2* – несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий (формула 12) *Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2)*.

Вычислим вероятности событий *В1*и *В2*. В этом примере имеется 35 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, событию *В1* (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому Р(*В* . Аналогично, Р(*В*. Следовательно,

Р(А) .

**Пример 23**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

*Решение.* Пусть событие *А* – ―обнаружен хотя бы один преступник‖. Разобьем это событие на более простые. Пусть *В1* – обнаружен первый преступник, а *В2* – обнаружен второй преступник. Тогда, *А=В1+В2* по определению суммы событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1+В2)*. Так как *В1*и *В2* – совместные события, то по теореме о вероятности суммы событий (формула 12) *Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2)-Р(В1 В2) = 0,5+0,5 – 0,25=0,75*.

**Пример 24**

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой из дверей он тратит 5 сек. Найти вероятность того, что он откроет все двери за 15 сек.

*Решение.* Пусть событие *А* – «открыты все двери». Разобьем это событие на более простые. Пусть *В* – «открыта 1-я», *С* – «открыта 2-я», а *D* – «открыта 3-я». Тогда *А=ВСD* по определению произведения событий. Следовательно *Р(А)=Р(ВСD)*. По теореме о вероятности произведения независимых событий (формула 3.10) *Р(ВСD) = Р(В)Р(C) Р(D)*.

Вычислим вероятности событий *В, C* и *D*. В этом примере имеется 3 равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий *В, C* и *D* благоприятствует 1 из них, поэтому Р(В)=Р(С)=Р(D)=

**Пример 25**

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одно из них, в связи с увеличением количества сотрудников, занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружены оба преступника.

*Решение.* Пусть событие *А* – ―обнаружены два преступника‖. Разобьем это событие на более простые. Пусть *В1* – обнаружен первый преступник, а *В2* – обнаружен второй преступник, после того, как пойман первый. Тогда, *А=В1В2* по определению произведения событий. Следовательно *Р(А)=Р(В1В2)*. Так как *В1*и *В2* – зависимые события, то по теореме о вероятности произведения зависимых событий *Р(В1В2) = Р(В1)Р(В2*/*В1) = 0,5 0,7=0,35*.

КОМБИНАТОРИКА

*Правило сложения.*

Если первое действие можно выполнить *n* различными способами, а второе — *m* способами, то выполнить первое ***ИЛИ*** второе действие можно *n* + *m* способами.

*Правило умножения.*

Если первое действие можно выполнить *n* различными способами, а второе — *m* способами, то выполнить первое ***И*** второе действие (в таком порядке) можно n способами.

Эти правила можно обобщить на случай 3-х, 4-х и более действий.

**Пример 26**

Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты вытягивают 3 карты.

Сколько существует различных вариантов карт на руках у игрока?

*Решение.*

В данном опыте производится 3 действия: вытягивание 1-й карты, 2-й карты и 3-й карты.

Вычислим, сколькими способами можно вытянуть 1-ую карту. Так как всего в колоде 52 карты, то имеем 52 различных способа. (Здесь мы применили принцип сложения: карта может быть двойка пик ***ИЛИ*** тройка

пик ***ИЛИ*** … ***ИЛИ*** туз червей. Значит, всего имеем 1+1+…+1=52 способа.) Вычислим, сколькими способами можно вытянуть 2-ую карту. Так как в колоде осталось 51 карта, то, значит, второе действие можно выполнить 51-м способом.

Аналогично рассуждая, находим, что 3-е действие можно осуществить 50-ю способами.

Всего различных вариантов **расположения** карт на руках у игрока будет 52·51·50= 132600 способов. Для ответа осталось разделить это число на 3·2·1 – это кол-во способов перетасовать эти 3 розданные карты.

*Ответ:* 22100.

ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ, РАЗМЕЩЕНИЙ, ПЕРЕСТАНОВОК

Если стоит задача вычислить сколькими способами можно расположить ―в ряд (т.е. важен порядок их следования) вытянутые m предметов из коробки содержащей различных n предметов, то имеем так называемую ситуацию перестановок.

Вычислим это количество: первую позицию можно заполнить n способами, вторую – n – 1 способом, третью – n – 2 способом, и т.д. Искомое количество способов заполнить все n позиций равно (по принципу умножения) n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... (n – m + 1) и обозначается .

Если стоит задача вычислить сколькими способами можно расположить ―в ряд (т.е. важен порядок их следования) вытянутые m предметов из коробки содержащей различных n предметов, то имеем так называемую ситуацию перестановок.

Вычислим это количество: первую позицию можно заполнить n способами, вторую – n – 1 способом, третью – n – 2 способом, и т.д. Искомое количество способов равно (по принципу умножения)

= n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... (n – m + 1).

Но, поскольку нам не важно какой именно элемент стоит на каком месте, то необходимо разделить на количество способов по- разному переставлять уже выбранные элементы. А это количество равно

= n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... 3 2 1 = n! (читается n факториал).

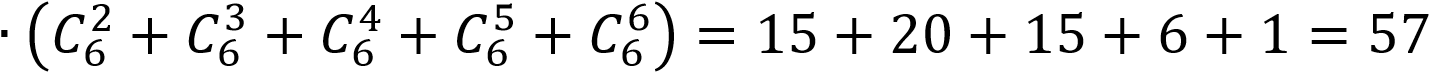
Искомое количество способов заполнить все n позиций равно

/ n! и обозначается .

**Пример 27**

В Совбезе ООН 11 членов: 5 постоянных и 6 так называемые ‖малые нации‖. Для принятия решения, надо, чтобы было 7 голосов ‖ЗА‖, причем следующим образом: все постоянные + как минимум 2 временных. Сколько всего вариантов голосования? Сколько всего можно организовать выигрышных коалиций? (Выигрышной коалицией называется такая, когда как бы ни голосовали противники решение все равно будет принято.) *Решение.*

Так, как голосуют 11 делегаций и у них есть 2 выбора (за, против), то по принципу умножения имеем 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 = 211 = 2048– вариантов голосования. Так как все постоянные члены должны проголосовать «за», то выигрышная коалиция определяется только временными членами, а кол-во – количеством способов выбрать2 или 3 или 4 или 5 или 6 временных членов, голосующих «за».

Имеем 1 способов, причем 15 – число так называемых **минимальных** выигрышных коалиций.

|  |
| --- |
| **Пример 28**  Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна единица.  *Решение***.**  На каждой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6. Поэтому пространство элементарных событий содержит 36 равновозможных исходов. Событию A благоприятствуют 11 исходов: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (1,6), (6,1), поэтому  Р(А)= |
| **Пример 29**  На красных карточках написаны буквы у, и, я, к, ц, ф, н, на синих — буквы а, а, о, т, т, с, ч. После тщательного перемешивания, что вероятнее: с первого раза из букв на красных карточках составить слово «функция» или из букв на синих карточках слово «частота»?  *Решение.*  Пусть событие A — наудачу составленное из 7 букв слово «функция»,  событие B — наудачу составленное из 7 букв слово «частота». Так как упорядочиваются два множества из 7 букв, то число всех исходов для событий A и B равно n = 7!. Событию A благоприятствует один исход m = 1, так как все буквы на красных карточках различны. Событию B благоприятствуют m = 2! · 2! исходов, так как буквы «а» и «т» встречаются дважды. Тогда P(A) = 1/7! , P(B) = 2! • 2! /7! , P(B) > P(A). |

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

**Пример 30**

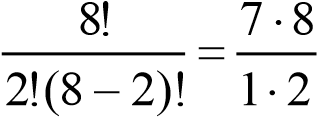
В урне находится 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что два одновременно изъятых наудачу шара будут черными.

*Решение:*

При выборе двух шаров из 20 существует различных вариантов,

где, тогда

Определим благоприятных исходов, т.е. извлечены два черных шара.

Два черных шара из 8 можно выбрать способами следовательно, число благоприятных исходов.

Искомая вероятность, согласно классическому определению вероятности, равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов:

Искомая вероятность, согласно классическому определению вероятности, равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов:

**Пример 31**

Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому.

*Решение:*

Воспользуемся классическим определением вероятности. Двузначные числа начинаются с 10 и заканчиваются 99 и всего их 90, т.е. N = 90. Теперь посчитаем, сколько у нас чисел кратных либо 4, либо 5, либо тому и другому.

Число кратное 4-м имеет вид , кратное 5 – , кратное 4 и 5 .

В интервале от 10 до 99 всего числа кратных четырём (2 кратных до десяти), чисел кратных пяти (1 кратное до 10) и числа кратных и четырём и пяти.

Так как множество чисел кратных 4 и множество чисел кратных 5 не пересекаются, то всего получается 22 + 18 = 40 чисел удовлетворяющих необходимому нам условию, причем числа кратные и четырем и пяти уже входят в эти 40 чисел. В итоге получаем, что вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому равна

**Пример 32**

В партии из 23 деталей находятся 10 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Используя классическое определение теории вероятности определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

*Решение:*

Число N всех равновероятных исходов испытания равно числу способов, которыми можно из 23 деталей вынуть две, т.е. числу сочетаний из 23 элементов по 2:

Число благоприятных исходов

Следовательно, искомая вероятность

**Пример 33**

В ящике лежат шары: 4 белых, 10 красных, 8 зеленых, 9 коричневых. Из ящика вынимают один шар. Пользуясь теоремой сложения вероятностей определить, какова вероятность, что шар окажется цветным (не белым)?

*Решение:*

Всего в ящике лежит N=4+10+8+9=31 шар.

Вероятность вытащить красный шар

Вероятность вытащить зеленый шар

Вероятность вытащить коричневый шар

Т.к. эти три события несовместны, то пользуясь теоремой сложения вероятностей определим вероятность того, что шар окажется цветным (не белым):

**Пример 34**

В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студенты знают ответы. Преподаватель выбирает из них два вопроса и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ *Решение:*

Вероятность вытащить знакомый вопрос p=0.75, незнакомый

q=1-p=1-0,75=0,25

Пусть H1 - гипотеза, что студент не знает ни одного из 2-х вопросов.

Вероятность этой гипотезы: 

Искомая вероятность соответственно равна:



**Пример 35**

На складе находятся 26 деталей из которых 13 стандартные. Рабочий берет наугад две детали. Пользуясь теоремой умножения вероятностей зависимых событий определить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

*Решение:*

Извлечение двух деталей равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через A - появление стандартной детали при первом извлечении, а через B - при втором. Событие, состоящее в извлечении двух стандартных деталей, является совмещением событий А и B. Пользуясь теоремой умножения вероятностей имеем:

P(AB)=P(A)\*PA(B) , где

Поскольку после того, как была вынута первая стандартная деталь на складе осталось 25 деталей, из которых 12 стандартных, то  , тогда



**Пример 36**

В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта ?

*Решение:*

Пусть A - cобытие, состоящее в том, что взятая деталь окажется первого сорта, а H1, H2 и H3 - гипотезы, что она изготовлена соответственно на 1, 2 и 3 станке.

Вероятности этих гипотез соответственно равны:

далее, из условия задачи следует, что: 

Используя формулу полной вероятности, получим искомую вероятность



ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайной величины. Случайными величинами являются, например, число вызовов, поступивших от абонентов на телефонную станцию в течении определенного промежутка времени, количество опечаток на 100 страницах текста.

Переменное Х, принимающее различные действительные значения, в зависимости от случая, называется случайной величиной.

Если случайная величина может принимать только значения*х* *х* *х*

с вероятностями 

(

то это случайная величина называется *дискретной случайной величиной.*

 – вероятность принятия случайной величиной Х значения

Дискретная случайная величина может быть задана следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | … |  |
|  |  |  |  | … |  |

**Пример 37**

При бросании игральной кости случайная величина принимает значения1, 2, 3, 4, 5, 6, которая задается следующей таблицей

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Пример 38**

В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Среди 1000 билетов 10 билетов имеют выигрыш 100 рублей, 20 билетов – 50 рублей, 40 билетов – 25 рублей, 50 билетов – 10 рублей, 80 билетов – 5 рублей, 100 билетов - 1 рубль, 700 билетов выигрыша не дают. Х – дискретная случайная величина – сумма возможного выигрыша для владельца одного билета. Закон распределения этой случайной величины зададим следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 5 | 10 | 25 | 50 | 100 |  |
|  | 0,7 | 0,1 | 0,08 | 0,05 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |  |

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ

#### ВЕЛИЧИНЫ

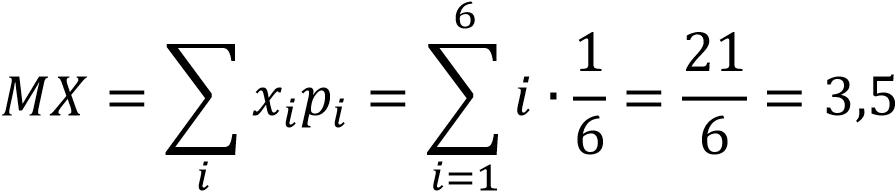
Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Иногда о случайной величине достаточно знать не весь закон распределения, а лишь некоторые числа, которые описывают случайную величину обобщенно. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Важнейшей числовой характеристикой случайной величины является математическое ожидание

Математическое ожидание дискретной случайной величины определяется по формуле M(X) =  (5. 2)

**Пример 39**

При бросании игральной кости случайная величина принимает значения1, 2, 3, 4, 5, 6, которая задается следующей таблицей

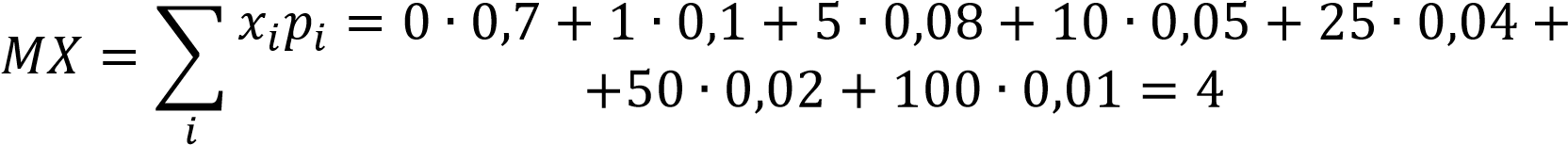
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  |  |  |  |  |  |  |



**Пример 40**

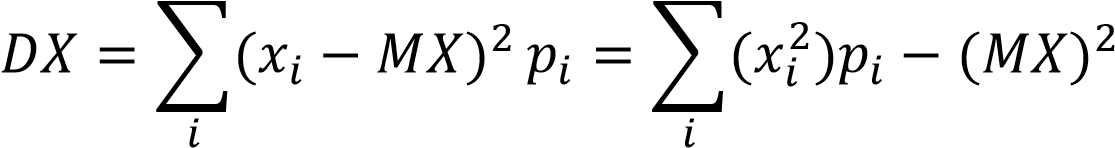
В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Среди 1000 билетов 10 билетов имеют выигрыш 100 рублей, 20 билетов – 50 рублей, 40 билетов – 25 рублей, 50 билетов – 10 рублей, 80 билетов – 5 рублей, 100 билетов - 1 рубль, 700 билетов выигрыша не дают. Х – дискретная случайная величина – сумма возможного выигрыша для владельца одного билета. Закон распределения этой случайной величины зададим следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 5 | 10 | 25 | 50 | 100 |
|  | 0,7 | 0,1 | 0,08 | 0,05 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |



ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дисперсия дискретной случайной величины определяется по формуле



**Пример 41**

Дискретная случайная величина задана рядом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Х | 1 | 2 | 3 |
| р | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

Найти дисперсию случайной величины.

*М(Х)* = 1

*D(Х)* = 

* 1. **Варианты контрольных работ.**

**Вариант №1**

1. Вычислить дифференциал функции

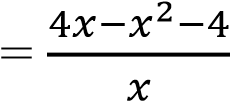
а)

б) *y* =

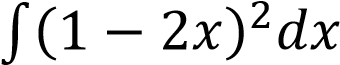
в) *y* = 

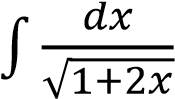
г)

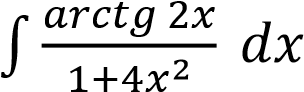
2. Исследовать функцию, построить график

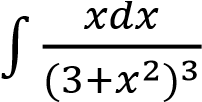
a) *y = 4x3(x – 1)* б) *y* 

3. Найти неопределенный интеграл

a) 

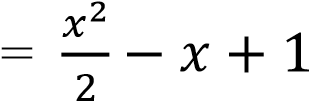
б) 

в) 

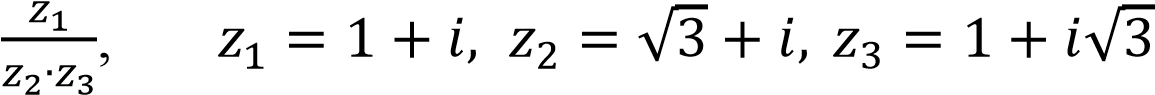
г) 

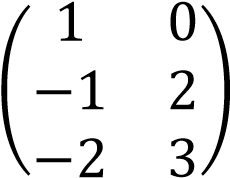
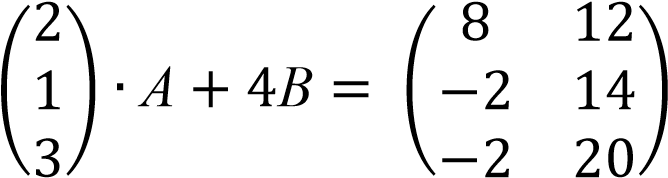
1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

Найти:

а) площадь фигуры ограниченной параболами *y*  и

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной гиперболой , осью ОУ и прямыми *у* = 1 и *у* = 6.

1. Вычислить: 
2. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А = (2 6); В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Из цифр 7, 2, 6, 4, 5 наугад составляется трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что это число будет четным?

Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| Pi | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,3 | 0,3 |

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

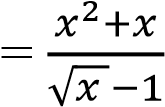
**Вариант №2**

1. Вычислить дифференциал функции

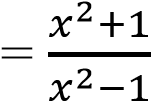
а)

б)

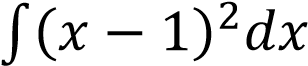
в) *у* 

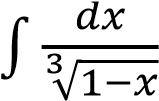
г) *y* 

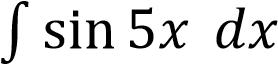
2. Исследовать функцию, построить график

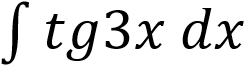
a) *y =*  б) *y* 

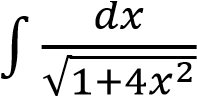
3. Найти неопределенный интеграл

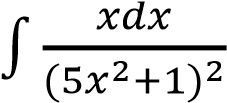
a) 

б) 

в) 

г) 

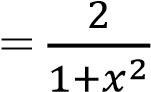
д) 

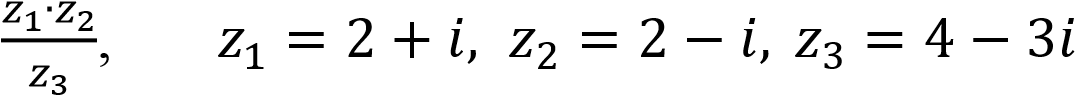
е) 

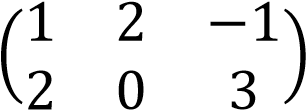
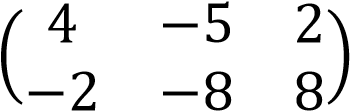
1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

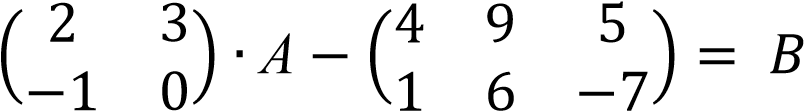
Найти:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой *y* = 4 –  и осью ОХ;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривыми *у* , *у* =  и прямой *х* = 2

1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А = ; В = ;



1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



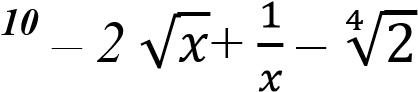
1. Решить задачи.

А) Студент пользуется тремя библиотеками, комплектование которых осуществляется независимо друг от друга. Нужная ему книга может быть в данных библиотеках с вероятностями 0,5; 0,6 и 0,7 соответственно. Какова вероятность того, что студент достанет нужную ему книгу в этих библиотеках?

Б) Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов.

**Вариант №3**

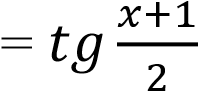
1. Вычислить дифференциал функции

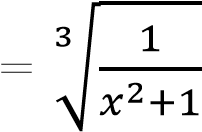
а) *у =х*

б) *у* = 

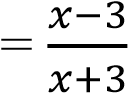
в*) у* = arctg

г) *у* = 

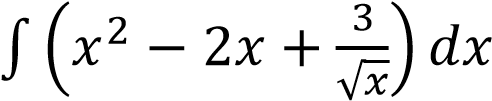
д) *y* 

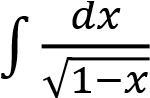
е) *y* 

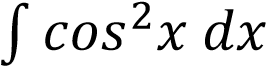
2. Исследовать функцию, построить график

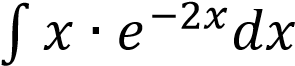
a) *y =*  б) *y* 

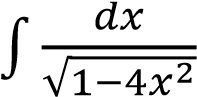
3. Найти неопределенный интеграл

a) 

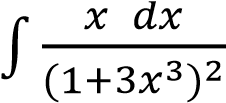
б) 

в) 

г) 

д) 

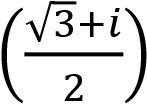


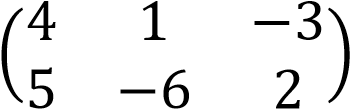
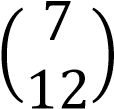
е) 

1. Решить задачи с помощью определенных интегралов: Найти: а) площадь фигуры, ограниченной линиями *y* = , *y* =  и *x* = 0

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболой *у* = 3 , и прямой *y = 3x + 7*



1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А =  ; В = ;

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Какова вероятность того, что число, выбранное наугад из всех трехзначных чисел, делится хотя бы на одно из чисел 4 и 6?

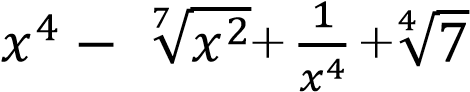
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

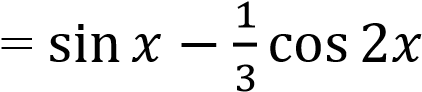
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,3 |

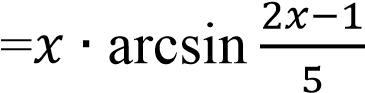
Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

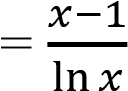
**Вариант №4**

1. Вычислить дифференциал функции

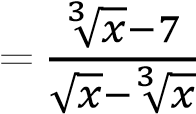
а) *у =7*

б) *у* 

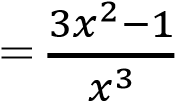
в*) у*

г) *у* 

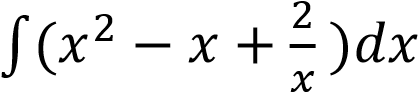
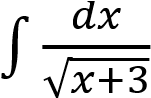
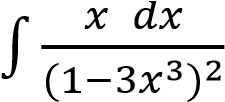
д) *y* = 

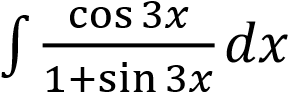
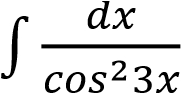
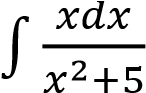
е) *y* 

2. Исследовать функцию, построить график

a) *y =*  б) *y* 

3. Найти неопределенный интеграл

a)  б)  в) 

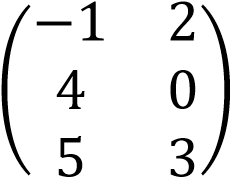
г)  д)  е) 

1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

Найти: а) площадь фигуры, ограниченной параболами *y* =  и прямой *y* = *x* + 2;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной одной волной синусоиды *y = sin x*  и осью ОХ.

1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А =  ; В = ;

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Восемь девушек, в том числе три сестры, водят хоровод. Какова вероятность того, что встав в круг наугад, сестры окажутся рядом?

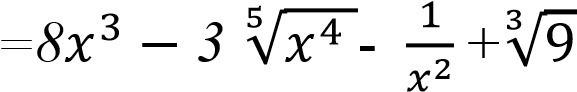
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

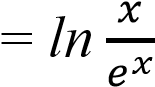
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 5 |
|  | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,2 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

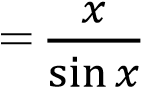
**Вариант №5**

1. Вычислить дифференциал функции

а) *у* 

б) *у* 

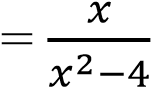
в) *у* = arcctg *x*

г) *у* 

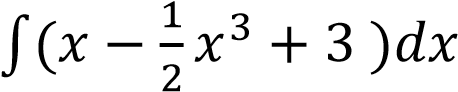
д) *y* 

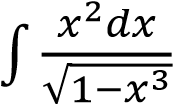
е) *y =* 

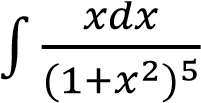
2. Исследовать функцию, построить график

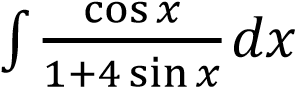
a) *y =*  б) *y* 

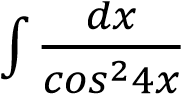
3. Найти неопределенный интеграл

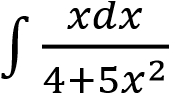
a) 

б) 

в) 

г) 

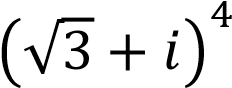
д) 

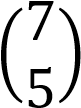
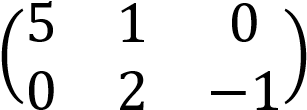
е) 

1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

Найти: а) площадь фигуры, ограниченной кривой и прямыми x = e, x =  *y* = 0;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболами *y* =  и *у* 

1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А =  ; В = ;

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Шары – 3 белых и 5 черных – располагаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность того, что белые шары окажутся расположенными подряд?

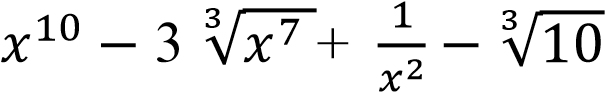
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

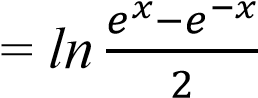
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -10 | 0 | 10 | 20 |
|  | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,4 |

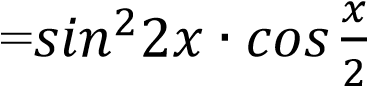
Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

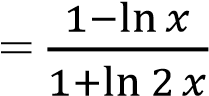
**Вариант №6**

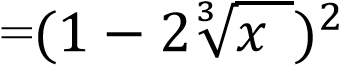
1. Вычислить дифференциал функции

а) *у =*

б) *у* 

в) *у* 

г) *у* 

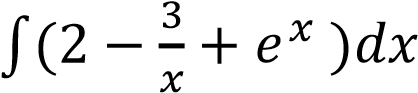
д) *y* 

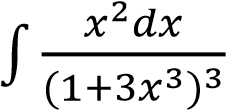
е) *y =* 

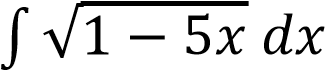
2. Исследовать функцию, построить график

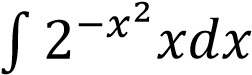
a) *y =*  б) *y* 

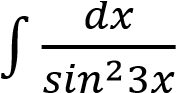
3. Найти неопределенный интеграл

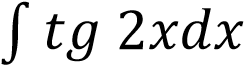
a) 

б) 

в) 

г) 

д) 

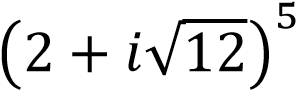
е) 

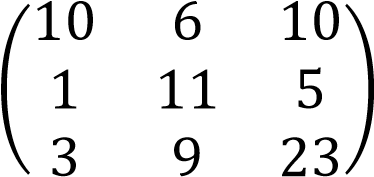
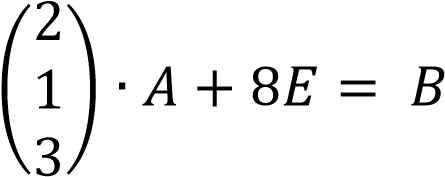
1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

Найти:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами и  ;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболами прямой *х* = 4 и осью ОХ

1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 8
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А =  ; В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Из общего числа 1000 лотерейных билетов 100 билетов – выигрышные. Какова вероятность того, что из 5 купленных билетов хотя бы один окажется выигрышным ?

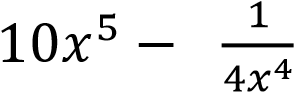
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

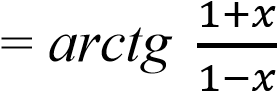
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -20 | 0 | 40 | 60 |
|  | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,1 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

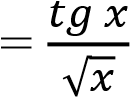
**Вариант №7**

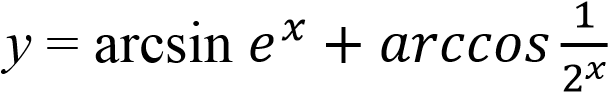
1. Вычислить дифференциал функции

а) *у =*

б) *у* 

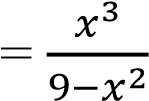
в) *у* =

г) *у* 

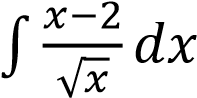
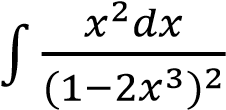
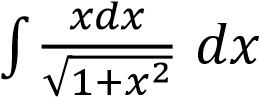
д) 

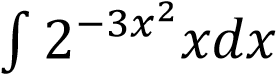
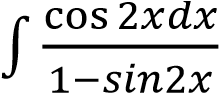
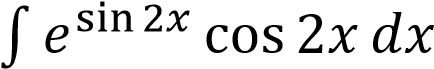
е) *y = ln*(1 – *ctg x*)

2. Исследовать функцию, построить график

a) *y =*  б) *y* 

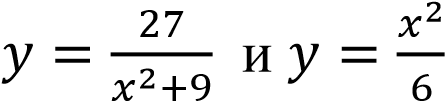
3. Найти неопределенный интеграл

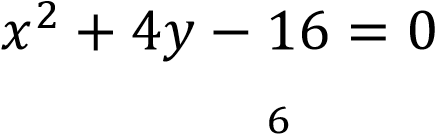
a)  б)  в) 

г)  д)  е) 

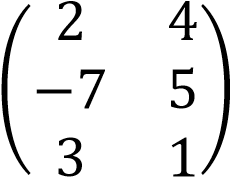
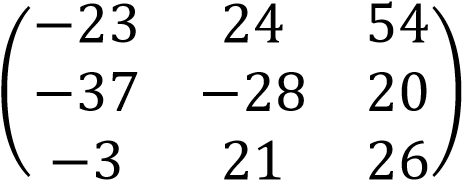
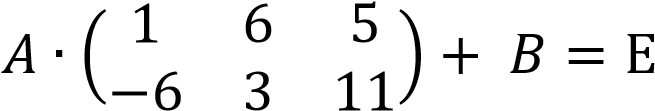
1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

Найти:

а) площадь фигуры, ограниченной кривыми ;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболой  и осью ОХ

1. Вычислить:
2. Решить уравнение: 27 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А = ; В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли четыре человека. Чему равна вероятность того, что на каком-нибудь этаже выйдет не менее двух из них?

Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 | 5 | 6 |
|  | 0,1 | 0,1 | 0,7 | 0,1 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

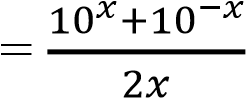
**Вариант №8**

1. Вычислить дифференциал функции

а) *у =*

б) *у* 

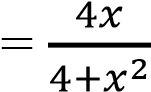
в) *у* = 

г) *у* 

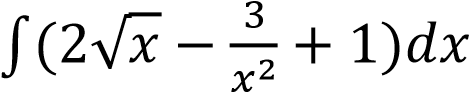
д) *y* *= tg 5x*

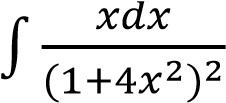
е) *y = ln*()

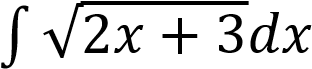
1. Исследовать функцию, построить график

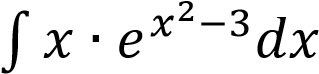
a) *y =*  б) *y* 

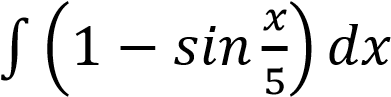
3. Найти неопределенный интеграл

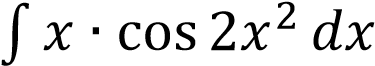
a) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

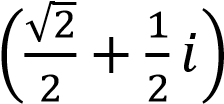
Найти:

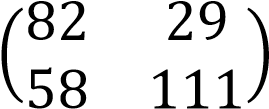
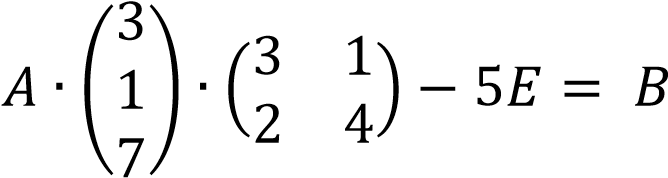
а) площадь фигуры, ограниченной параболами;



б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной параболой  и прямыми *у* = 0; *х* = 1; *х* = 2;



1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А = ; В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Отдельные тома некоторого пятитомного издания располагаются на книжной полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что хотя бы один том окажется не на своем месте?

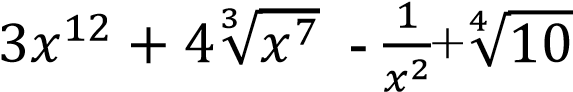
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

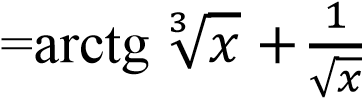
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 10 | 30 | 40 | 50 |
|  | 0,2 | 0,1 | 0,6 | 0,1 |

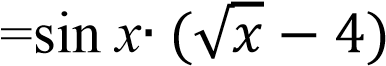
Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

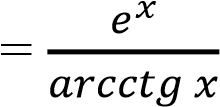
**Вариант № 9**

1. Вычислить дифференциал функции

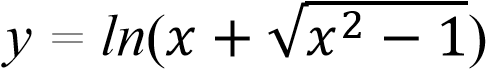
а) *у =*

б) *у* 

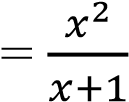
в) *у* 

г) *у* 

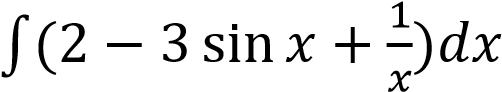
д) *y* *=* 

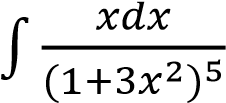
е) 

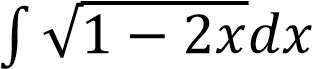
2. Исследовать функцию, построить график

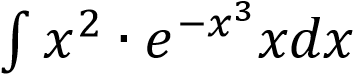
a) *y =*  б) *y* 

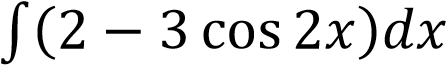
3. Найти неопределенный интеграл

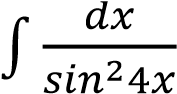
a) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

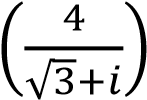
Найти:

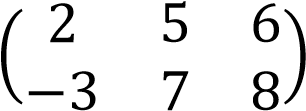
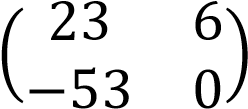
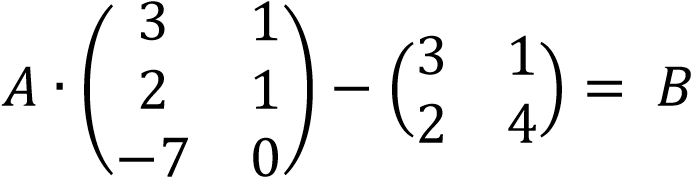
а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой *х* ; осью ОХ

 ;

б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной параболой  и прямой *у* = *х*;



1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 27 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А = ; В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.



1. Решить задачи.

А) Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

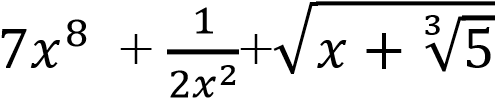
Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|  |  |  |  |  |  |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

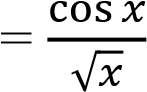
**Вариант № 10**

1. Вычислить дифференциал функции

а) *у =*

б) *у* =arctg 

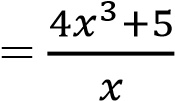
в) *у* = *ln*(  

г) *у* 

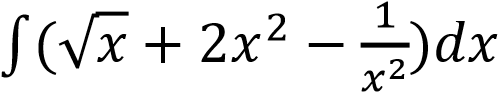
д) *y* *=* 

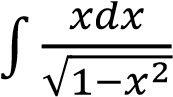
е) *y* 

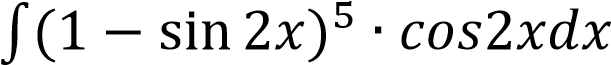
2. Исследовать функцию, построить график

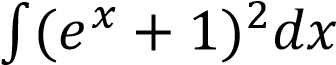
a) *y =*  б) *y* 

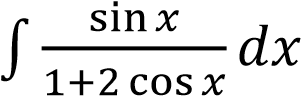
3. Найти неопределенный интеграл

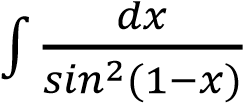
a) 

б) 

в) 

г) 

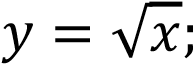
д) 

е) 

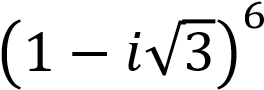
1. Решить задачи с помощью определенных интегралов:

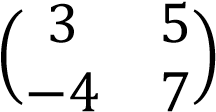
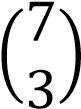
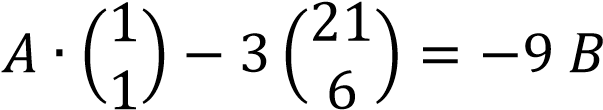
Найти:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой 



б) объем тела, полученного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кубической параболой  и прямыми *у* = 1; *х* = 0 ;

1. Вычислить: 
2. Решить уравнение: 16 
3. Проверить удовлетворяют ли матрицы А и В уравнению.

А =  ; В = ; 

1. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными по формуле Крамера.
2. 

1. Решить задачи.

А) Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

Б) Дискретная случайная величина *х* задана рядом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 0,3 | P2 | 0,5 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

1. **ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К  ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОМУ ЗАЧЕТУ (ЭКЗАМЕНУ) ПО ИТОГАМ ВСЕХ ИЗУЧЕННЫХ ТЕМ**

1. Понятие производной, ее физический и геометрический смысл.
2. Таблица производных, правила дифференцирования. Вычисление производных.
3. Производная обратной функции, сложной функции.
4. Монотонность функций, признаки возрастания и убывания функций.
5. Точки экстремума, необходимое и достаточное условия экстремума
6. Правило исследования функций на экстремум.
7. Выпуклые, вогнутые функции, точки перегиба.
8. Признаки выпуклости и вогнутости.
9. Правило исследования функций на перегиб.
10. Дифференцирование сложных функций
11. Построение графиков функций
12. Понятие первообразной, лемма о первообразных, неопределенный интеграл и его свойства.
13. Таблица интегралов, интегрирование по таблице и подстановкой.
14. Определенный интеграл, его свойства, формула Ньютона-Лейбница, вычисление определенных интегралов.
15. Вычисления с помощью определенного интеграла площадей криволинейных фигур, объемов тел вращения, давления.
16. Понятие мнимой единицы, определение комплексного числа, действия с комплексными числами.
17. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
18. Степени мнимой единицы.
19. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая форма комплексного числа.
20. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
21. Системы линейных уравнений. Понятия определителей системы.
22. Матрицы, свойства матриц.
23. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса
24. Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера
25. Основные понятия комбинаторики/перестановки, размещения, сочетания.
26. Виды событий, классическое определение вероятности.
27. Теорема сложения вероятностей
28. Случайная величина
29. Математическое ожидание случайной величины.
30. Дисперсия случайной величины.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**Основные источники**

1. Виноградов, Ю.Н. Математика и информатика [Текст]: учебник / Ю.Н. Виноградов, А.И. Гомола, В.И. Потапов, Е.И. Соколова. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 272 стр.
2. Григорьев, С.Г. Математика [ Текст]: учебник / С.Г. Григорьев,С.В. Задулина. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 384 стр.
3. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математической статистики [Текст]: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов . – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2005. – 240 стр.
4. Спирина М.С. Теория вероятностей и математической статистики [Текст]: учебник / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 352 стр.
5. Филимонова, Е.В. Математика [Текст]: учебник / Е.В. Филимонова. - Ростов н / Д: Феникс, 2003. – 384 стр.
6. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике [ Текст ]: учебник / В.С. Шипачев. – М.: «Высшая школа», 2003. – 304 стр.
7. Яковлева, Г.Н. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа [Текст]: учебник / М.И. Каченовский, Ю.М. Колягин, А.Д. Кутасов, Г.Л. Луканкин. – М.: Наука, 1988. – 272 стр.

### **Дополнительные источники**

1. Богомолов, Н.В. Задачи по математике с решениями [Текст]: учебник/.В. Богомолов. – М.: «Высшая школа», 2006. – 640 стр.
2. Самаров, К.Л. Задачи по математике с решениями [Текст]: учебник/.Л. Самаров ,А.С. Шапкин. – М.: Издательско – торговая корпорация «Дашков и К0»,2006. – 548 стр.
3. Шипачев, В.С. Основы высшей математики [Текст]: учебник/ В.С.

Шипачев. – М.: «Высшая школа», 2003. – 479 стр.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Адресный бланк на обложку тетради**

|  |
| --- |
| Дисциплина «Математика»  Контрольная работа №1  Группа \_\_\_\_\_\_\_\_ Шифр\_\_\_\_\_\_  Дата выполнения\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Фамилия, имя, отчество\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

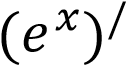
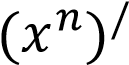
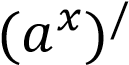
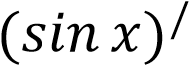
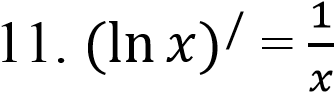
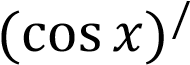
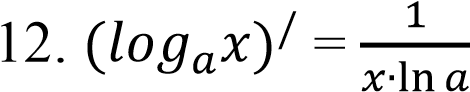
**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННых источников**

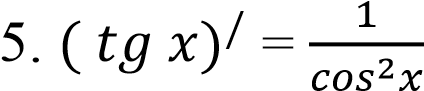
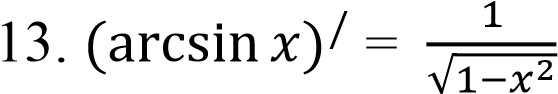
1. Виноградов, Ю.Н. Математика и информатика [Текст]: учебник / Ю.Н. Виноградов, А.И. Гомола, В.И. Потапов, Е.И. Соколова. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 272 стр.
2. Григорьев, С.Г. Математика [ Текст]: учебник / С.Г. Григорьев,С.В. Задулина. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 384 стр.
3. Кочетков, Е.С. Теория вероятностей и математической статистики [Текст]: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов . – М.: ФОРУМ: ИНФРА – М, 2005. – 240 стр.

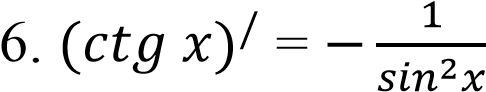
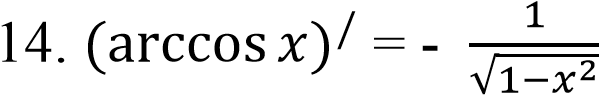
# ПРИЛОЖЕНИЕ В

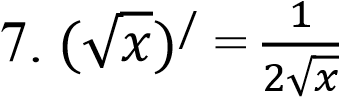
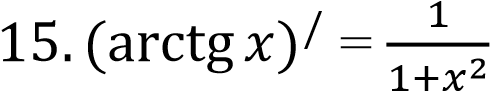
# СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

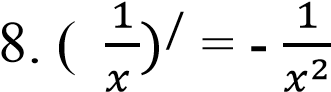
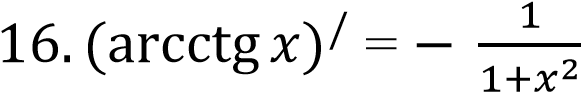
### ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. C/ = 0 ( C – const) 9.  = 
2.  = *n*  10.  = 
3.  = *cos x* 
4.  = - *sin x* 

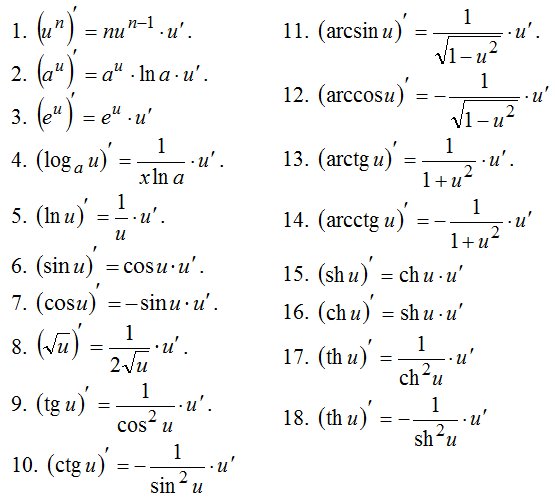
 

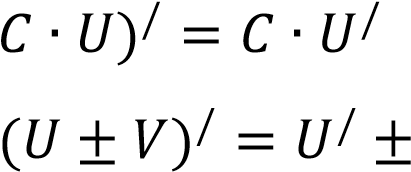
 

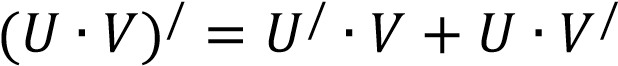
### ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ



ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ





3. 

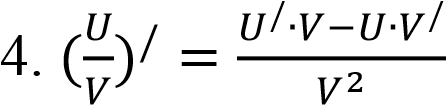


ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

